

Processamento de Imagens

Introdução

Mylène Christine Queiroz de Farias

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília (UnB)
Brasília, DF 70910-900

`mylene@unb.br`

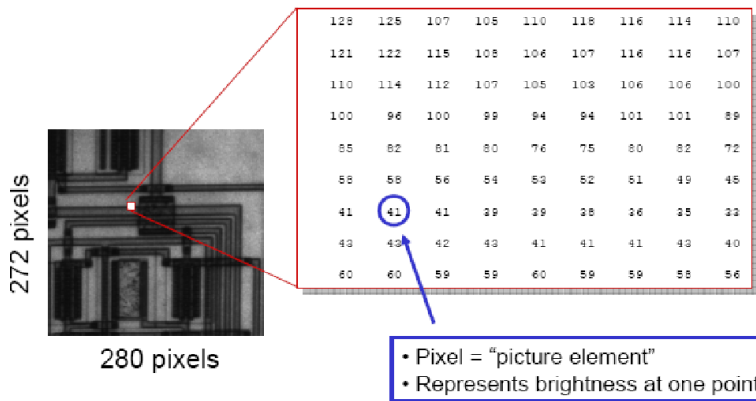
15 de Março de 2016

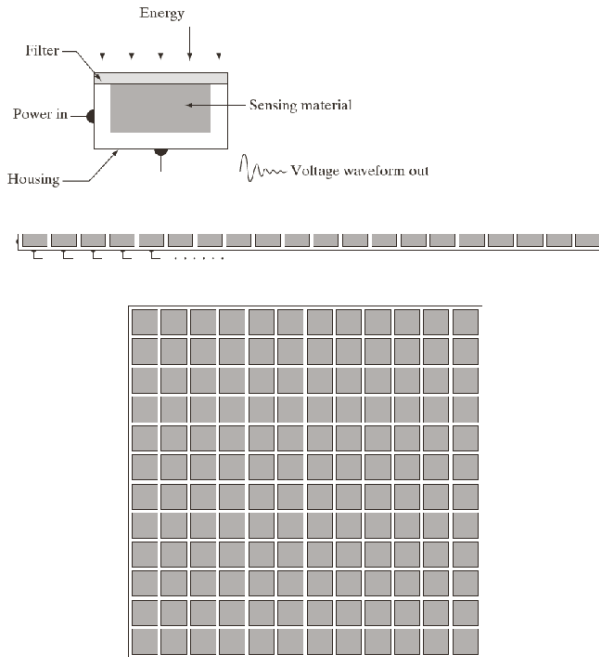
Aula 02: Processamento de Imagens no Domínio Espacial
Parte 1 - Transformações



Sumário:

Imagem *Digital*





a
b
c

FIGURE 2.12

- (a) Single imaging sensor.
(b) Line sensor.
(c) Array sensor.

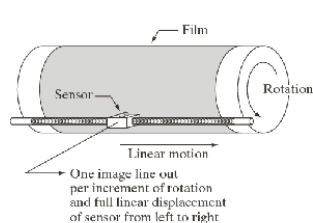
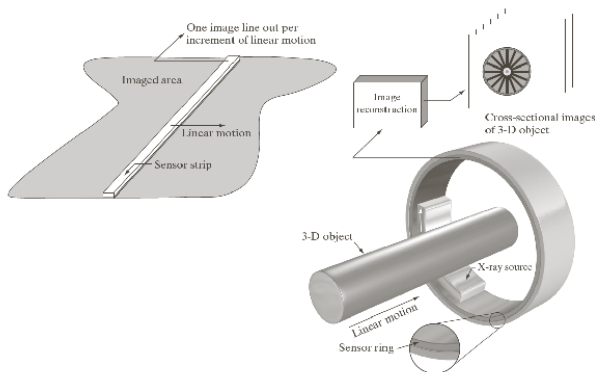


FIGURE 2.13
Combining a single sensor with motion to generate a 2-D image.



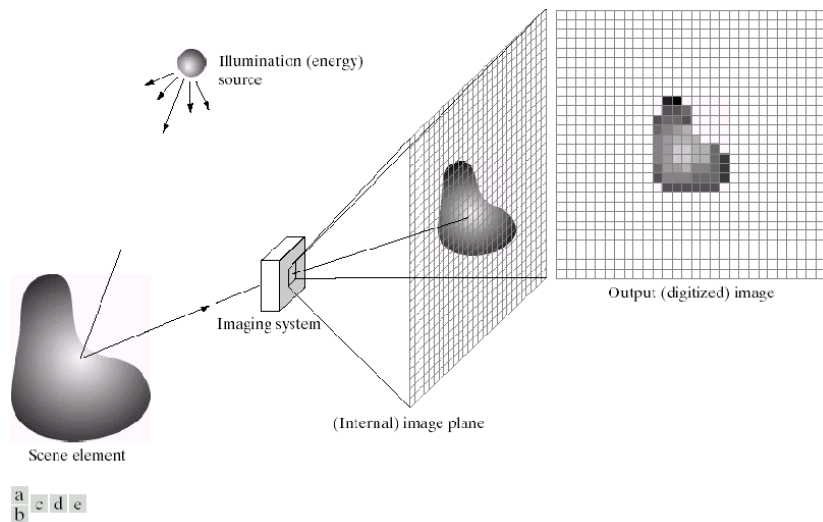
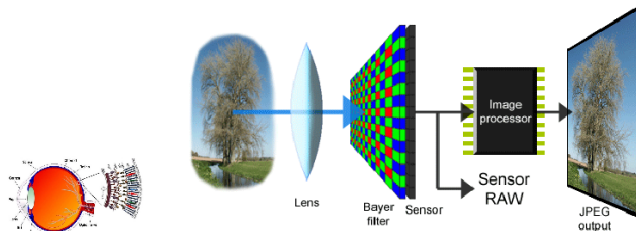
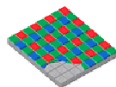


FIGURE 2.15 An example of the digital image acquisition process. (a) Energy ("illumination") source. (b) An element of a scene. (c) Imaging system. (d) Projection of the scene onto the image plane. (e) Digitized image.

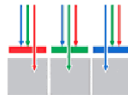
Mosaicos



Mosaic Capture



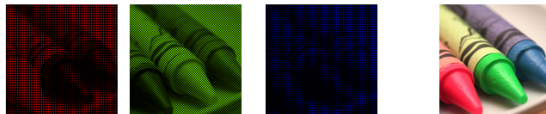
In conventional systems, color filters are applied to a single layer of photodetectors in a tiled mosaic pattern.

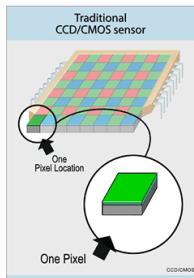
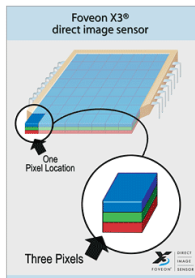


The filters let only one wavelength of light - red, green or blue - pass through to any given pixel, allowing it to record only one color.

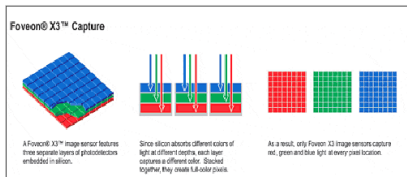
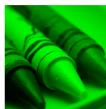


As a result, mosaic sensors capture only 25% of the red and blue light, and just 50% of the green.





X3



Quality Benefits of Foveon X3™

Mosaic Filter

Foveon X3™



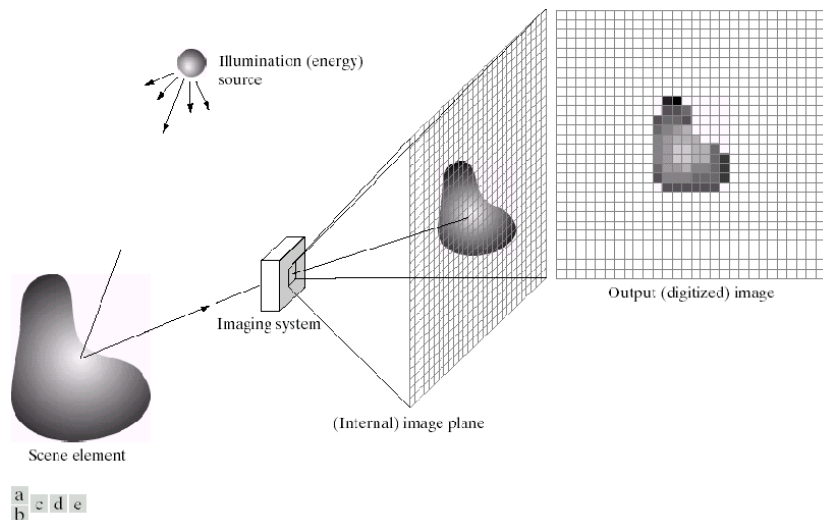


FIGURE 2.15 An example of the digital image acquisition process. (a) Energy ("illumination") source. (b) An element of a scene. (c) Imaging system. (d) Projection of the scene onto the image plane. (e) Digitized image.

- Modelos de Imagens:

- $f(x, y)$
- f é a intensidade, (x, y) coordenadas espaciais
- iluminação x componente refletida

Luz no objeto

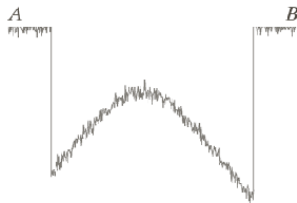
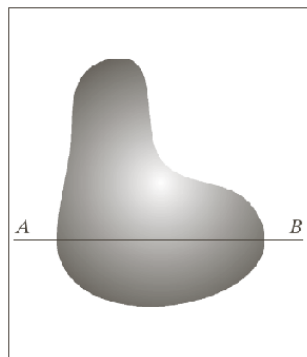
$$f(x, y) = i(x, y) \cdot r(x, y)$$

$$0 \leq i(x, y) < \infty, 0 \leq r(x, y) \leq 1)$$

$$L_{min} \leq I \leq L_{max}$$

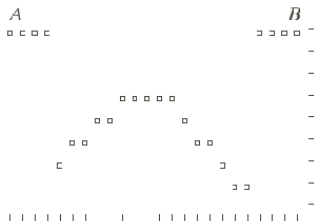
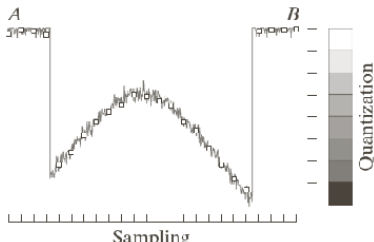
$$L_{min} = i_{min} \cdot r_{min}$$

$$L_{max} = i_{max} \cdot r_{max}$$



a b
c d

FIGURE 2.16
Generating a digital image.
(a) Continuous image. (b) A scan line from A to B in the continuous image, used to illustrate the concepts of sampling and quantization. (c) Sampling and quantization. (d) Digital scan line.

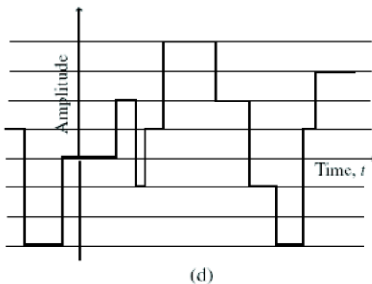
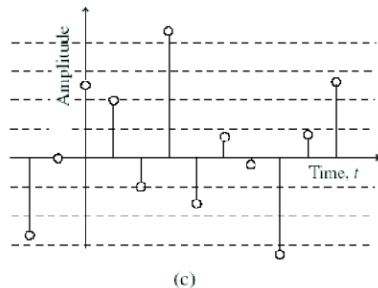
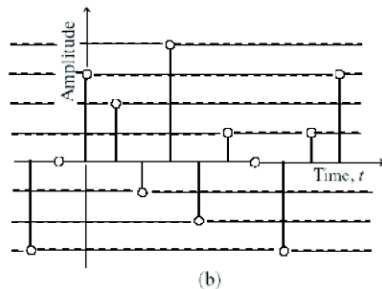
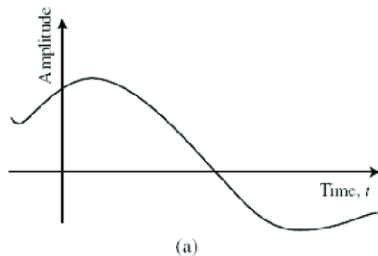


Sampling

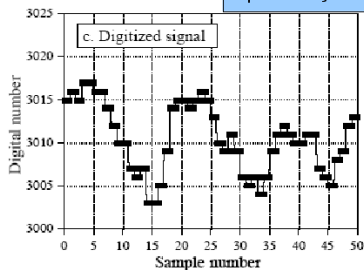
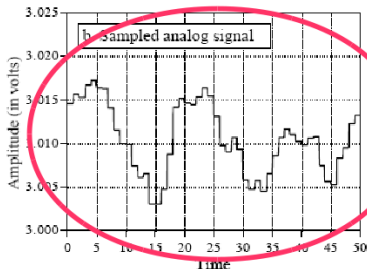
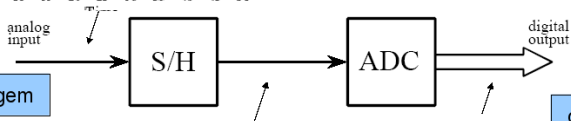
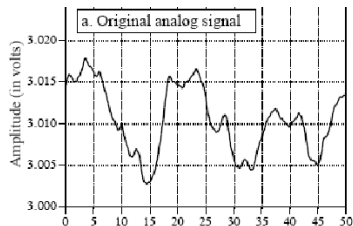
Sinais Digitais e Sinais Contínuos

- Sinal contínuo ou analógico
 - Valores de amplitude reais ou complexos
 - Definido para todos os instantes de tempo
- Sinal discreto
 - Valores de amplitude discretos (inteiros)
 - Definido apenas para valores de tempo discretos

$$x = x[n], \quad -\infty < n < \infty$$



Processo de Digitalização

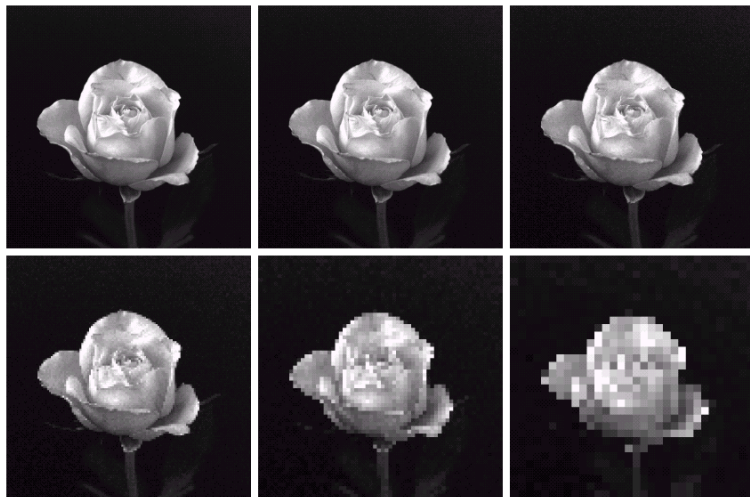


Amostragem e Quantização

- Resolução Espacial (amostragem)
 - Determina o menor detalhe percebido em uma imagem
- Resolução em Níveis de Cinza/Cores (quantização)
 - A menor mudança no valor do nível de cinza que pode ser discernido.

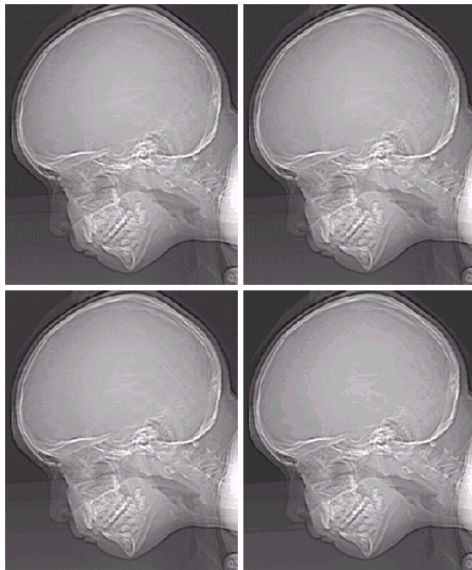


FIGURE 2.19 A 1024×1024 , 8-bit image subsampled down to size 32×32 pixels. The number of allowable gray levels was kept at 256.



a	b	c
d	e	f

FIGURE 2.20 (a) 1024×1024 , 8-bit image. (b) 512×512 image resampled into 1024×1024 pixels by row and column duplication. (c) through (f) 256×256 , 128×128 , 64×64 , and 32×32 images resampled into 1024×1024 pixels.



a b
c d

FIGURE 2.21

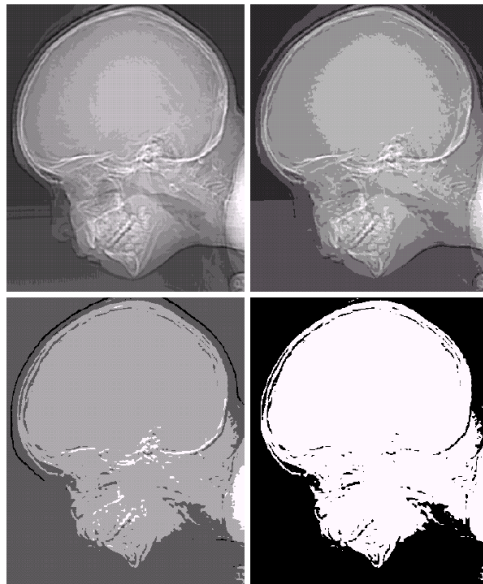
(a) 452×374 , 256-level image. (b)–(d) Image displayed in 128, 64, and 32 gray levels, while keeping the spatial resolution constant.

Resolução de Intensidade/Cor

$$L=2^k$$

e f
g h

FIGURE 2.21
(Continued)
(e)–(h) Image displayed in 16, 8, 4, and 2 gray levels. (Original courtesy of Dr. David R. Pickens, Department of Radiology & Radiological Sciences, Vanderbilt University Medical Center.)



Resolução de
Intensidade/Cor

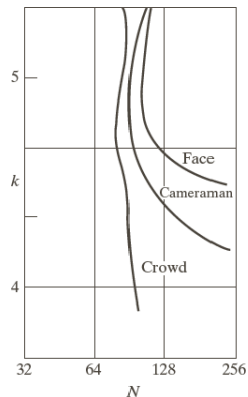
Relação $N \times k$



a b c

FIGURE 2.22 (a) Image with a low level of detail. (b) Image with a medium level of detail. (c) Image with a relatively large amount of detail. (Image (b) courtesy of the Massachusetts Institute of Technology.)

FIGURE 2.23
Typical
isopreference
curves for the
three types of
images in
Fig. 2.22.



Quanto mais detalhes, menos importa o número de níveis.

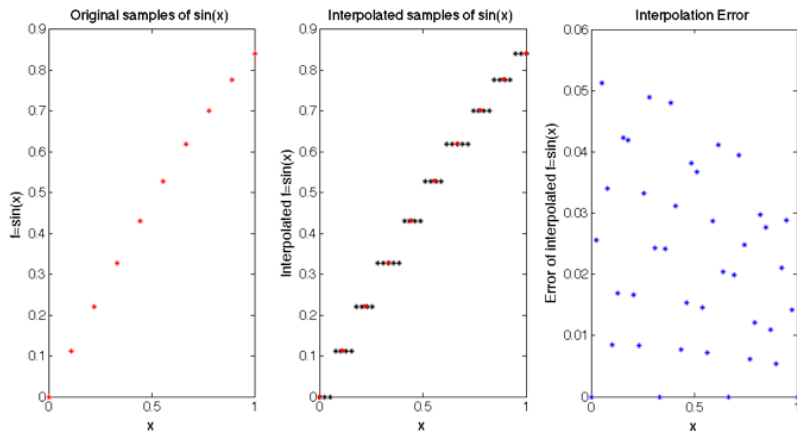
- A interpolação ou reamostragem de imagens é amplamente utilizada em processamento de imagens e vídeos;
- Utilizada para ampliar, reduzir, e rotacionar imagens;
- Ou para criar efeitos como “morphing/warping”, corrigir distorção da lente, fazer interpolação de cores em dispositivos para aquisição de imagens.

- A interpolação ou reamostragem de imagens é amplamente utilizada em processamento de imagens e vídeos;
- Utilizada para ampliar, reduzir, e rotacionar imagens;
- Ou para criar efeitos como “morphing/warping”, corrigir distorção da lente, fazer interpolação de cores em dispositivos para aquisição de imagens.
- Ou ainda para registrar imagens (criar uma única imagem unindo duas ou mais imagens), estabilizar tremor da câmera, corrigir a movimentação do paciente, normalizar imagens médicas que envolvem vários sujeitos, etc.

Em processamento de imagens ...

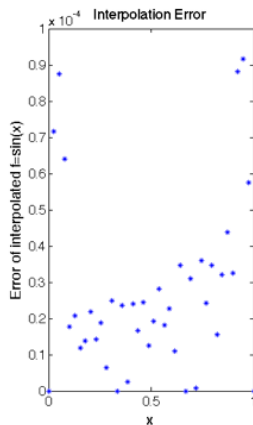
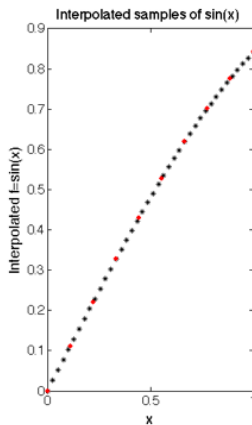
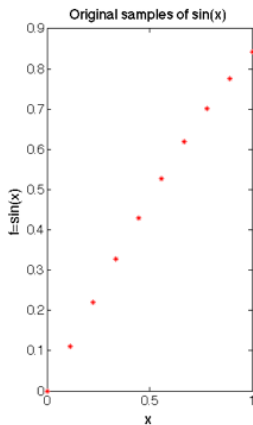
- Interpolação é processo em que valores conhecidos são usados para estimar valores desconhecidos.

- Vizinho mais próximo



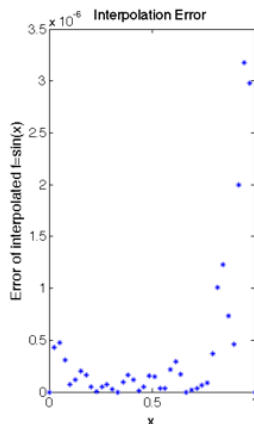
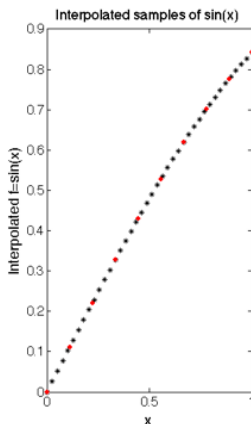
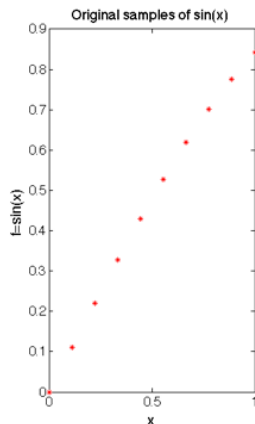
Interpolação 1-D

- Vizinho mais próximo
- Linear: $v(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot x \cdot y + d$



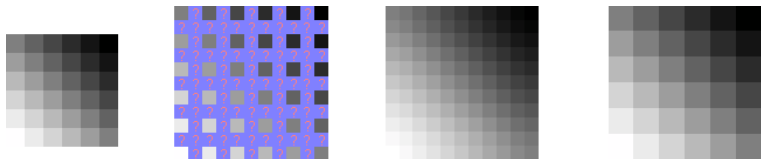
Interpolação 1-D

- Vizinho mais próximo
- Linear: $v(x) = a \cdot x + b$
- Cúbica: $v(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$



Ampliação da imagem baseada no Método do Vizinho mais Próximo (*Nearest Neighbour*):

- Atribui a cada nova posição o valor do pixel do seu vizinho mais próximo na imagem original;
- Replicação de pixels – caso especial quando a ampliação é por um fator inteiro (2, 3 , 4, etc.)

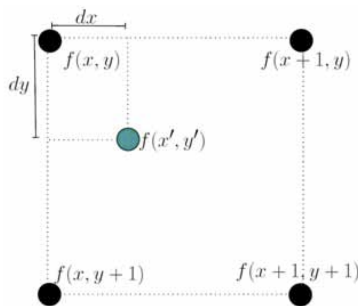


Interpolação Vizinho mais Próximo 2-D



- Efeito de blocos;
- Processamento rápido
- Não cria novos valores (mantém estatísticas da imagem)

Interpolação Vizinho mais Próximo 2-D



$$f(x', y') = \begin{cases} f(x, y) & \text{para } dx < 0.5 \text{ e } dy < 0.5 \\ f(x+1, y) & \text{para } dx \geq 0.5 \text{ e } dy < 0.5 \\ f(x, y+1) & \text{para } dx < 0.5 \text{ e } dy \geq 0.5 \\ f(x+1, y+1) & \text{para } dx \geq 0.5 \text{ e } dy \geq 0.5 \end{cases} \quad (1)$$

Método do Vizinho mais Próximo:

- Exemplo com uma imagem:

$$\begin{array}{ccccc} \dots & f(i,j) & f(i,j+1) & \dots \\ \dots & f(i+1,j) & f(i+1,j+1) & \dots \end{array}$$

Método do Vizinho mais Próximo:

- Exemplo com uma imagem:

$$\begin{array}{ccccc} \dots & f(i,j) & & f(i,j+1) & \dots \\ \dots & f(i+1,j) & & f(i+1,j+1) & \dots \end{array}$$

- Acrescentando linhas e colunas de zeros:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & f(i,j) & 0 & & f(i,j+1) & & \dots \\ \dots & 0 & 0 & & 0 & & \dots \\ \dots & f(i+1,j) & 0 & & f(i+1,j+1) & & \dots \end{array}$$

Método do Vizinho mais Próximo:

- Exemplo com uma imagem:

$$\begin{array}{ccccc} \dots & f(i,j) & & f(i,j+1) & \dots \\ \dots & f(i+1,j) & & f(i+1,j+1) & \dots \end{array}$$

- Acrescentando linhas e colunas de zeros:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & f(i,j) & & 0 & & f(i,j+1) & \dots \\ \dots & & 0 & & 0 & & \dots \\ \dots & f(i+1,j) & & 0 & & f(i+1,j+1) & \dots \end{array}$$

- Após a interpolação utilizando o MVP:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & f(i,j) & & f(i,j) & & f(i,j+1) & \dots \\ \dots & f(i,j) & & f(i,j) & & f(i,j+1) & \dots \\ \dots & f(i+1,j) & & f(i+1,j) & & f(i+1,j+1) & \dots \end{array}$$

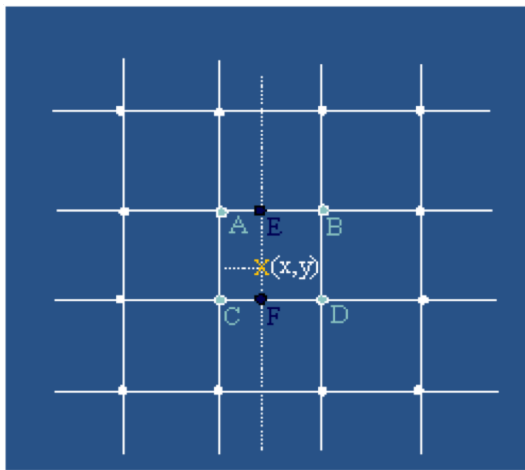


(a) Imagem original.



(b) Região da imagem ampliada.

Interpolação Bilinear 2-D



- O valor obtido pela média ponderada dos valores dos pixels E e F são transferidos para a posição X
- Efeito de suavização devido a operação de média

Bilinear:

$$\begin{array}{ccccc} \dots & f(i,j) & f(i,j+1) & \dots \\ \dots & f(i+1,j) & f(i+1,j+1) & \dots \end{array}$$

Bilinear:

$$\begin{array}{ccccc} \dots & f(i,j) & & f(i,j+1) & \dots \\ \dots & f(i+1,j) & & f(i+1,j+1) & \dots \end{array}$$

- Acrescentando linhas e colunas de zeros:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & f(i,j) & a & f(i,j+1) & \dots \\ \dots & b & c & d & \dots \\ \dots & f(i+1,j) & e & f(i+1,j+1) & \dots \end{array}$$

Bilinear:

$$\begin{array}{ccccc} \dots & f(i,j) & f(i,j+1) & \dots \\ \dots & f(i+1,j) & f(i+1,j+1) & \dots \end{array}$$

- Acrescentando linhas e colunas de zeros:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & f(i,j) & a & f(i,j+1) & \dots \\ \dots & b & c & d & \dots \\ \dots & f(i+1,j) & e & f(i+1,j+1) & \dots \end{array}$$

$$a = (f(i,j) + f(i,j+1)) / 2$$

$$e = (f(i+1,j) + f(i+1,j+1)) / 2$$

$$b = (f(i,j) + f(i+1,j)) / 2$$

$$d = (f(i,j+1) + f(i+1,j+1)) / 2$$

$$c = (f(i,j) + f(i,j+1) + f(i+1,j) + f(i+1,j+1)) / 4$$

Interpolação Bilinear Bilinear 2-D

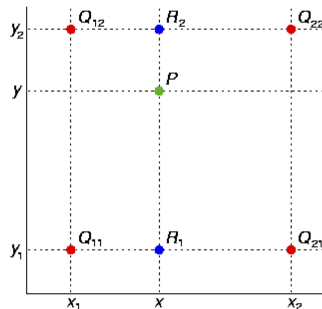
$$f(R_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21})$$

$$f(R_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22})$$

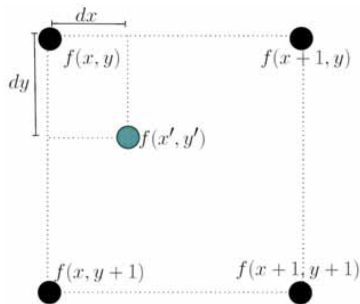
$$f(P) \approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(R_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(R_2).$$



$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx \frac{f(Q_{11})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x_2 - x)(y_2 - y) + \\ &\quad \frac{f(Q_{21})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x - x_1)(y_2 - y) + \\ &\quad \frac{f(Q_{12})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x_2 - x)(y - y_1) + \\ &\quad \frac{f(Q_{22})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x - x_1)(y - y_1) \\ &= \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \left(f(Q_{11})(x_2 - x)(y_2 - y) + \right. \\ &\quad \left. f(Q_{21})(x - x_1)(y_2 - y) + \right. \\ &\quad \left. f(Q_{12})(x_2 - x)(y - y_1) + \right. \\ &\quad \left. f(Q_{22})(x - x_1)(y - y_1) \right) \end{aligned}$$



$$f(x', y') = (1 - dx) \cdot (1 - dy) \cdot f(x, y) + dx \cdot (1 - dy) \cdot f(x + 1, y) + (1 - dx) \cdot dy \cdot f(x, y + 1) + dx \cdot dy \cdot f(x + 1, y + 1)$$





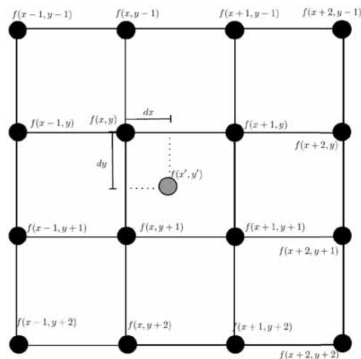
(a) Imagem original



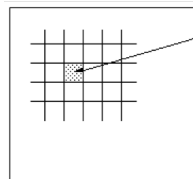
(b) Região da imagem ampliada

Interpolação Bicúbica 2-D

- 16 vizinhos: $p(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x_i y_j$
- Geralmente a interpolação bicúbica realiza um papel melhor de preservar detalhes que a interpolação bilinear.
- Interpolação bicúbica é o padrão usado em programas comerciais como Adobe Photoshop e Corel Photopaint.



Interpolação Bicúbica 2-D



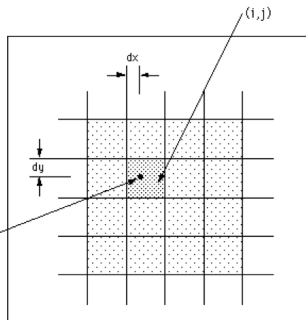
Final image

Point to estimate (i',j')

$$F(i',j') = \sum_{m=-1}^2 \sum_{n=-1}^2 F(i+m, j+n) R(m-dx) R(dy-n)$$

$$R(x) = \frac{1}{6} [P(x+2)^3 - 4P(x+1)^3 + 6P(x)^3 - 4P(x-1)^3]$$

$$P(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



Original image

Exact transformed position of (i',j')



(a) Imagem original



(b) Região da imagem ampliada



FIGURE 2.24 (a) Image reduced to 72 dpi and zoomed back to its original size (3692×2812 pixels) using nearest neighbor interpolation. This figure is the same as Fig. 2.20(d). (b) Image shrunk and zoomed using bilinear interpolation. (c) Same as (b) but using bicubic interpolation. (d)–(f) Same sequence, but shrinking down to 150 dpi instead of 72 dpi [Fig. 2.24(d) is the same as Fig. 2.20(c)]. Compare Figs. 2.24(e) and (f), especially the latter, with the original image in Fig. 2.20(a).

- Por elementos ou matrizes
- Lineares ou não lineares
 - homogeneidade e aditividade
- Aritméticas
 - soma, subtração, divisão, multiplicação
- Lógicas
- etc.

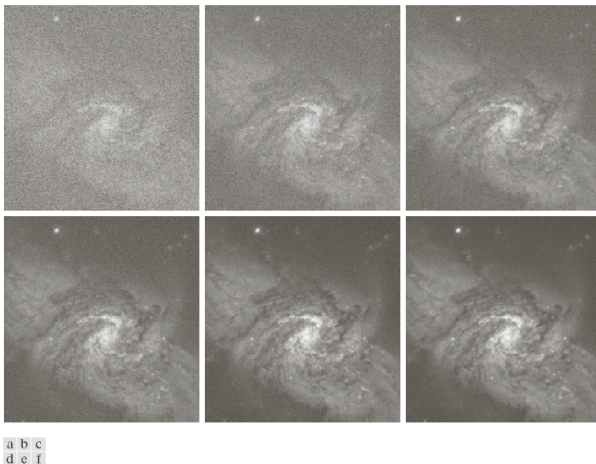


FIGURE 2.26 (a) Image of Galaxy Pair NGC 3314 corrupted by additive Gaussian noise. (b)–(f) Results of averaging 5, 10, 20, 50, and 100 noisy images, respectively. (Original image courtesy of NASA.)

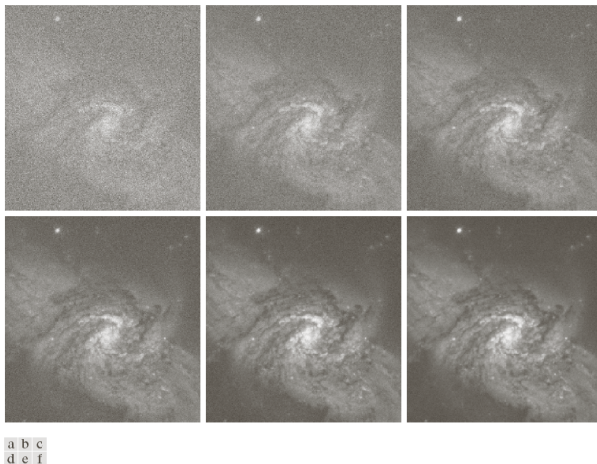
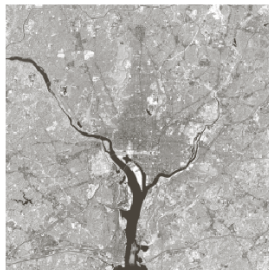


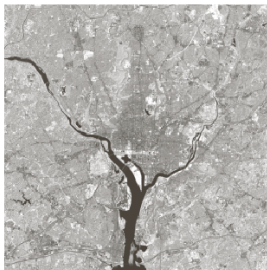
FIGURE 2.26 (a) Image of Galaxy Pair NGC 3314 corrupted by additive Gaussian noise. (b)–(f) Results of averaging 5, 10, 20, 50, and 100 noisy images, respectively. (Original image courtesy of NASA.)

- Este procedimento funciona se o ruído presente tem média zero e é descorrelacionado.

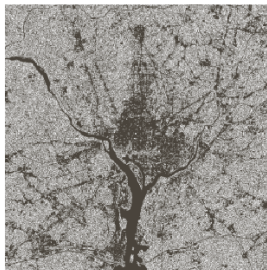
Diferença



original

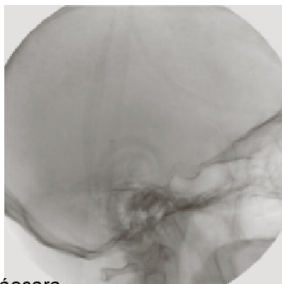


Zerando o bit menos
significativo



Diferença
normalizada

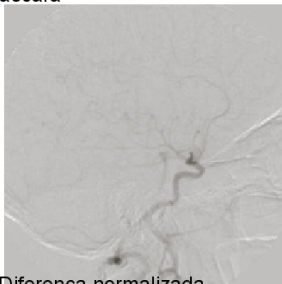
Diferença



máscara



"live images"



Diferença normalizada



Diferença "melhorada"



Original
 $g(x,y) = f(x,y) h(x,y)$



$h(x,y)$



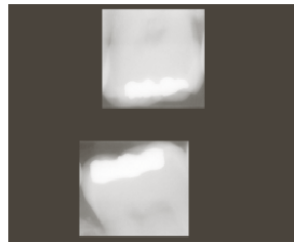
$g'(x,y) = g(x,y)/h(x,y)$



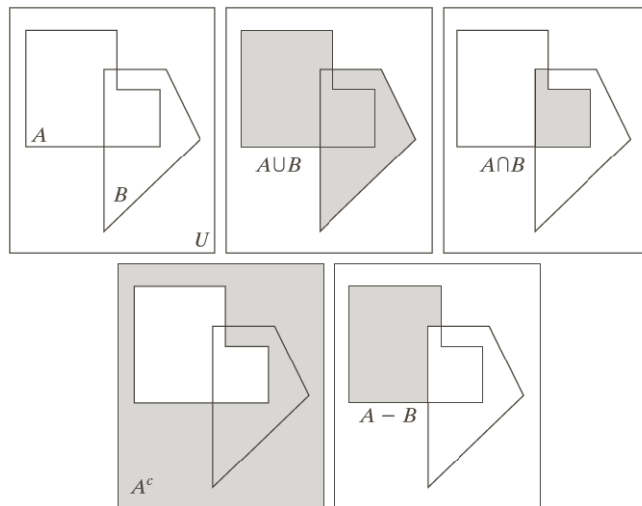
original



Máscaras englobando as
Regiões de interesse



Multiplicação do original
pela imagem com máscara



a b c
d e

FIGURE 2.31

(a) Two sets of coordinates, A and B , in 2-D space. (b) The union of A and B . (c) The intersection of A and B . (d) The complement of A . (e) The difference between A and B . In (b)–(e) the shaded areas represent the member of the set operation indicated.

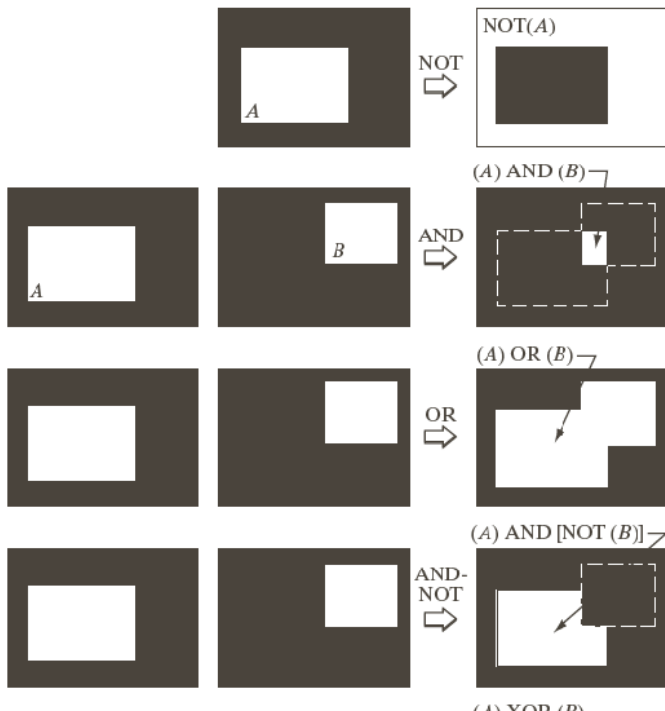


FIGURE 2.33
Illustration of
logical operations
involving
foreground
(white) pixels.
Black represents
binary 0s and
white binary 1s.
The dashed lines
are shown for
reference only.
They are not part
of the result.



Original
 $f(x,y)$



Imagem negativa
 $255-f(x,y)$



União do original com
uma imagem constante
 $= \{\max(a,b)\}$

TABLE 2.2

Affine transformations based on Eq. (2.6.–23).

Transformation Name	Affine Matrix, T	Coordinate Equations	Example
Identity	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v$ $y = w$	
Scaling	$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = c_x v$ $y = c_y w$	
Rotation	$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v \cos \theta - w \sin \theta$ $y = v \sin \theta + w \cos \theta$	
Translation	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$	$x = v + t_x$ $y = w + t_y$	
Shear (vertical)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v + s_v w$ $y = w$	
Shear (horizontal)	$\begin{bmatrix} 1 & s_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v$ $y = s_h v + w$	



a b c d

FIGURE 2.36 (a) A 300 dpi image of the letter T. (b) Image rotated 21° clockwise using nearest neighbor interpolation to assign intensity values to the spatially transformed pixels. (c) Image rotated 21° using bilinear interpolation. (d) Image rotated 21° using bicubic interpolation. The enlarged sections show edge detail for the three interpolation approaches.



a b
c d

FIGURE 2.37
Image registration.
(a) Reference image. (b) Input (geometrically distorted image). Corresponding tie points are shown as small white squares near the corners. (c) Registered image (note the errors in the borders). (d) Difference between (a) and (c), showing more registration errors.

- Um pixel p na coordenada (x,y) pode ter as seguintes vizinhanças:
 - N_4 (vizinhança-4 de p) – Inclui os quatro vizinhos horizontais e verticais de p cujas coordenadas são:
$$(x+1, y), (x-1, y), (x, y+1), (x, y-1)$$
 - N_d (vizinhança diagonal de p) – Inclui os quatro vizinhos diagonais de p cujas coordenadas são:
$$(x+1, y+1), (x+1, y-1), (x-1, y+1), (x-1, y-1)$$
 - N_8 (vizinhança-8 de p) – Inclui os oito vizinhos horizontais e verticais de p , que inclui o conjunto da vizinhança-4 e da vizinhança diagonal de p .

Relação entre os pixels

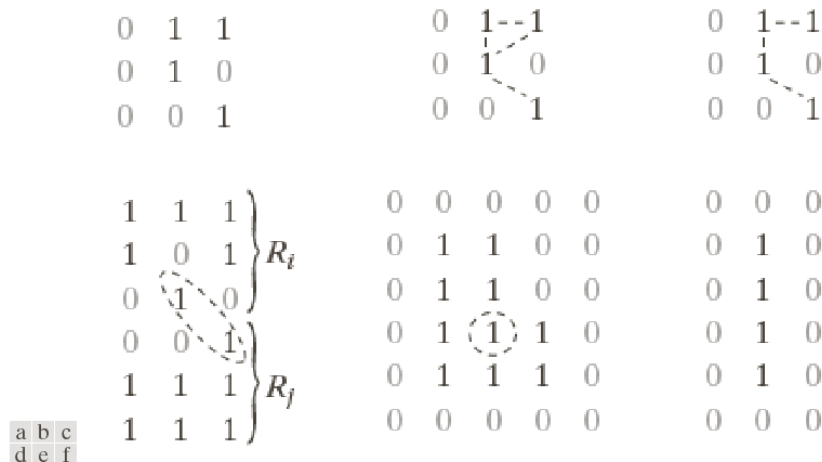


FIGURE 2.25 (a) An arrangement of pixels. (b) Pixels that are 8-adjacent (adjacency is shown by dashed lines; note the ambiguity). (c) m -adjacency. (d) Two regions that are adjacent if 8-adjacency is used. (e) The circled point is part of the boundary of the 1-valued pixels only if 8-adjacency between the region and background is used. (f) The inner boundary of the 1-valued region does not form a closed path, but its outer boundary does.

- Vizinhanças:
 - N_4, N_8, N_d
- Adjacência

- Vizinhanças:
 - N_4, N_8, N_d
- Adjacência
 - Conjunto de pixels vizinhos com intensidades em um certo conjunto (V)

- Vizinhanças:
 - N_4, N_8, N_d
- Adjacência
 - Conjunto de pixels vizinhos com intensidades em um certo conjunto (V)
 - Adjacência-4: dois pixels p e q , com valores no conjunto V , têm adjacência-4 se q está no conjunto $N_4(p)$.

- Vizinhanças:
 - N_4, N_8, N_d
- Adjacência
 - Conjunto de pixels vizinhos com intensidades em um certo conjunto (V)
 - Adjacência-4: dois pixels p e q , com valores no conjunto V , têm adjacência-4 se q está no conjunto $N_4(p)$.
 - Adjacência-8: dois pixels p e q , com valores no conjunto V , têm adjacência-8 se q está no conjunto $N_8(p)$.

- Vizinhanças:

- N_4, N_8, N_d

- Adjacência

- Conjunto de pixels vizinhos com intensidades em um certo conjunto (V)
 - Adjacência-4: dois pixels p e q , com valores no conjunto V , têm adjacência-4 se q está no conjunto $N_4(p)$.
 - Adjacência-8: dois pixels p e q , com valores no conjunto V , têm adjacência-8 se q está no conjunto $N_8(p)$.
 - Adjacência-m (mista): dois pixels p e q , com valores no conjunto V , têm adjacência-m se:
 - q está em $N_4(p)$
 - q está em $N_d(p)$ e $N_4(p) \cap N_4(q)$ não tem pixels com valores em V

Relação entre os pixels

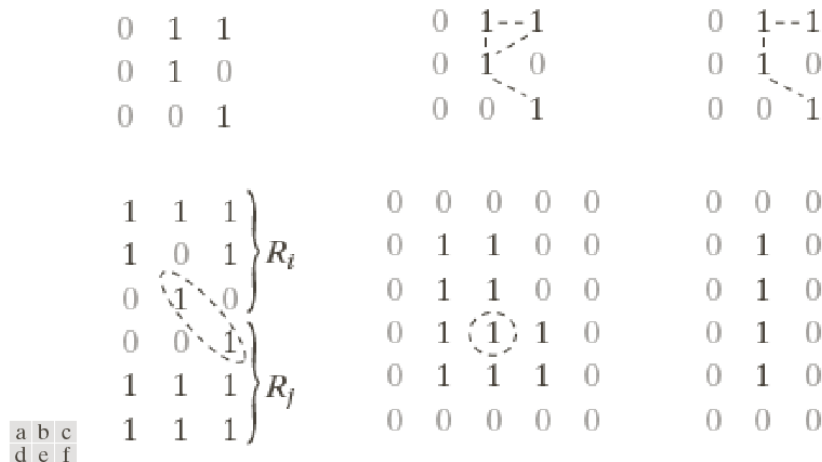


FIGURE 2.25 (a) An arrangement of pixels. (b) Pixels that are 8-adjacent (adjacency is shown by dashed lines; note the ambiguity). (c) m -adjacency. (d) Two regions that are adjacent if 8-adjacency is used. (e) The circled point is part of the boundary of the 1-valued pixels only if 8-adjacency between the region and background is used. (f) The inner boundary of the 1-valued region does not form a closed path, but its outer boundary does.

- Um caminho digital ou curva digital de um pixel p com coordenadas (x, y) a um pixel q com coordenadas (s, t) é uma sequência de pixels distintos com coordenadas:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

onde $(x_0, y_0) = (x, y)$, $(x_n, y_n) = (s, t)$ e os pixels (x_i, y_i) e (x_{i-1}, y_{i-1}) são adjacentes para $i \leq n$.

- Um caminho digital ou curva digital de um pixel p com coordenadas (x, y) a um pixel q com coordenadas (s, t) é uma sequência de pixels distintos com coordenadas:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

onde $(x_0, y_0) = (x, y)$, $(x_n, y_n) = (s, t)$ e os pixels (x_i, y_i) e (x_{i-1}, y_{i-1}) são adjacentes para $i \leq n$.

- n é o comprimento do caminho
- caminho fechado: $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$
- pode-se definir caminhos com adjacência 4, 8 ou m , dependendo do tipo de adjacência especificada.

Relação entre os pixels

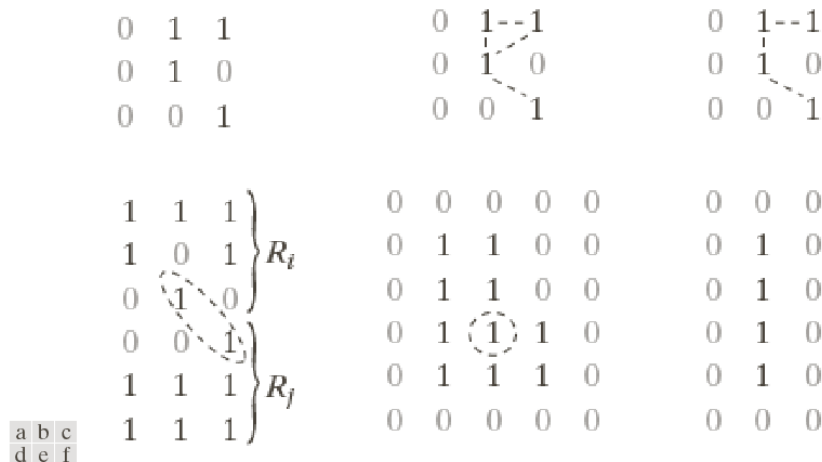


FIGURE 2.25 (a) An arrangement of pixels. (b) Pixels that are 8-adjacent (adjacency is shown by dashed lines; note the ambiguity). (c) m -adjacency. (d) Two regions that are adjacent if 8-adjacency is used. (e) The circled point is part of the boundary of the 1-valued pixels only if 8-adjacency between the region and background is used. (f) The inner boundary of the 1-valued region does not form a closed path, but its outer boundary does.

- Conectividade: Seja S um subconjunto de pixels:
 - p e q são um conjunto conectado se existe um caminho entre p e q , consistindo de pixels em S ;
 - se p possui apenas um componente conectado, o conjunto S é conectado;
 - Para qualquer pixel p em S , o conjunto de pixels que são conectados a ele em S é chamado de componente conexo de S .
 - Chamamos R de uma região da imagem se R é um conjunto conectado.
 - Duas regiões R_i e R_j são adjacentes se a sua união forma um conjunto conectado. Regiões que não são adjacentes são ditos disjuntos.
 - Quando se refere a regiões, existem adjacências-4, -8.

- Background vs. foreground
- Borda ou contorno
 - Borda interna – Conjunto de pontos que são adjacentes aos pontos do complemento de R (têm pelo menos um vizinho no background)
 - Borda externa
- Medidas de Distâncias D

- Considerando $p(x, y)$, $q(s, t)$, e $z(v, w)$, D é uma medida de distância:

$$D(p, q) \geq 0$$

$$D(p, q) = D(q, p)$$

$$D(p, z) \leq D(p, q) + D(q, z)$$

- D_4 (city block)

$$D_4(p, q) = |x - s| + |y - t|$$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 2 \\ & & & & \\ & & & & 2 \\ & & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ & & 2 & 1 & 2 \\ & & & & 2 \end{array}$$

- Distância Euclidiana:

$$D_e(p, q) = \left[(x - s)^2 + (y - t)^2 \right]^{1/2}$$

D_4 distance ≤ 2 from (x, y)

..

- D_8 (distância tabuleiro de xadrez):

$$D_8(p, q) = \max(|x - s|, |y - t|)$$

- D_m (menor caminho m entre os pontos)

- $p = p_2 = p_4 = 1$
- Se $p_1 = p_3 = 0$, então
 $D_m(p, p_4) = 2$
- E se $p_1 = 1$? $D_m(p, p_4) = 3$

2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	1	0	1	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2

D_8 distance ≤ 2
from (x, y)

	p_3	p_4
p_1	p_2	
p		