Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Departamento de Engenharia Elétrica - FT - UnB
Disciplina: Introdução aos Processos Estocásticos - Período 2004.2
Professor: Geovany Araújo Borges **Nota:**
Prova 2: Estimação, Processos Estocásticos e Filtragem - Data: 24/01/2005

Nome: ______________________________ **Matrícula:** ____________

Instruções:

- Tempo máximo de duração: 3 horas.
- Explique o desenvolvimento das questões. Resultados sem explicações e sem desenvolvimentos não serão aceitos;
- Não use aproximações, exceto quando explicitamente indicado;
- É permitido o uso de máquina calculadora, bem como a consulta de material impresso trazido pelo aluno;

Questões:

1. Seja $x_1, ..., x_N$ medições positivas e iid segundo a densidade
$$p(x_i|\theta) = \frac{x_i}{\theta}\exp(-\frac{x_i^2}{2\theta}) \tag{1}$$
com parâmetro $\theta > 0$. Determine a estimativa de máximo de verosimilhança do parâmetro θ **(pontos: 1,0)**. Se esta estimativa for não-polarizada, determine o limite de Cramer-Rao para o estimador **(pontos: 0,5)**.

2. Considerando ainda o quesito 1 com $N > 1$ medições, sendo $p(\theta) = \theta\exp(-\theta)$, a densidade *a priori* do parâmetro $\theta > 0$, determine o estimador MAP Bayesiano para este parâmetro **(pontos: 1,5)**.

3. Considere um processo estacionário no sentido amplo $x(t)$ com função de auto-correlação $\gamma_x(\tau) = a^{|\tau|}$ com $0 < a < 1$ e $E\{x(t)\} = \mu$. Seria $x(t)$ ergódico na média? Caso não, quais condições seriam necessárias para que $x(t)$ seja ergódico na média? **(pontos: 2,5)**

4. Considere o processo
$$y(t) = \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} \tag{2}$$
com $\varepsilon > 0$ e $x(t)$ sendo um movimento Browniano. Mostre que $y(t)$ é um processo Gaussiano estacionário e determine $\gamma_y(\tau)$. Qual o limite de $\gamma_y(\tau)$ se $\varepsilon \to 0$. **(pontos: 2,0).**

5. Considere o SDED invariante no tempo
$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{w}_k, \tag{3}$$
$$\mathbf{y}_k = \mathbf{M}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \tag{4}$$
com $\mathbf{x}_k \in \Re^n$, $\mathbf{y}_k \in \Re^m$, $\mathbf{w}_k \in \Re^n$ e $\mathbf{v}_k \in \Re^m$. $\mathbf{w}_k$ e $\mathbf{v}_k$ são ruídos brancos Gaussianos descorrelacionados com $\mathbf{x}_0$ e tais que
$$\begin{aligned} E\{\mathbf{w}_k\} &= E\{\mathbf{v}_k\} = E\{\mathbf{w}_k\mathbf{v}_k^T\} = \mathbf{0}, \\ E\{\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^T\} &= \begin{cases} \mathbf{Q}_k & \text{, para } k = j \\ \mathbf{0} & \text{, caso contrário} \end{cases}, \\ E\{\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^T\} &= \begin{cases} \mathbf{R}_k & \text{, para } k = j \\ \mathbf{0} & \text{, caso contrário} \end{cases}. \end{aligned}$$
Seja $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$ o erro de estimação no instante k obtido pela aplicação do filtro de Kalman ($\hat{\mathbf{x}}_k$ é a estimativa do filtro após a correção usando a medição $\mathbf{y}_k$). Mostre que $\tilde{\mathbf{x}}_k$ e $\mathbf{y}_k$ são descorrelacionados **(pontos: 2,5)**.

BOA PROVA!