

## Experiência 5

# Projeto e Simulação do Controle no Espaço de Estados de um Pêndulo Invertido sobre Carro

*Professores: Adolfo Bauchspiess e Geovany A. Borges*

O objetivo deste experimento é projetar e simular (Simulink®) o controle no espaço de estados de um pêndulo invertido. O projeto do controlador deverá ser baseado no modelo linearizado do pêndulo invertido operando em torno da referência de posição do carro e do ângulo da barra.

### 1 - Introdução

No presente experimento, os alunos deverão implementar em simulação um regulador por espaço de estados de um pêndulo invertido. No laboratório, os alunos deverão determinar a matriz de ganho do controlador em função dos pólos desejados em malha fechada para o sistema linearizado. Para auxiliar no projeto, uma simulação, como projeto inicial é fornecida. Esta simulação foi adaptada de “penddemo.mdl” que acompanha o Simulink®.

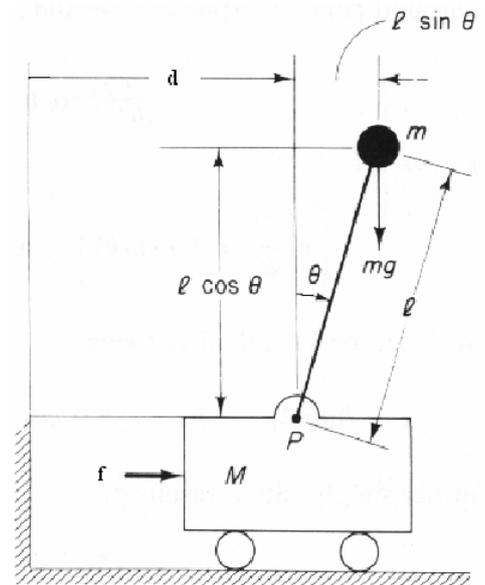
### 2 - Modelo do processo

O processo a ser controlado é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \ddot{d} &= \frac{l\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - g \sin(\theta) \cos(\theta) + \frac{f}{m}}{\left(\frac{M}{m} + \sin^2 \theta\right)} \\ \ddot{\theta} &= \frac{\frac{(M+m)}{m} g \sin(\theta) - l\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \frac{f}{m} \cos(\theta)}{l\left(\frac{M}{m} + \sin^2 \theta\right)} \end{aligned} \quad (1)$$

Nestas equações, tem-se:

- $M = 0,455$  kg : massa do carro;
- $m = 0,21$  kg : massa da barra;
- $l = 0,305$  m : distância do centro de massa do pêndulo com relação ao ponto de fixação no carro;  $g=9,8$  m/s<sup>2</sup> : aceleração da gravidade;
- $f$ : força exercida no carro para mover o sistema;
- $d$  : posição do carro;
- $\theta$  : ângulo do pêndulo com relação à vertical, com  $\theta = 0$  sendo o ângulo correspondente ao pêndulo na posição vertical para cima.



Observar ainda, que o atuador satura:  $-10 \text{ N} \leq f \leq 10 \text{ N}$ .

Definem-se as variáveis de estado com sendo

$$x_1 = d, x_2 = \dot{d}, x_3 = \theta \text{ e } x_4 = \dot{\theta}.$$

Quando organizadas no vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ , e sendo  $u = f$ , a entrada, obtém-se o modelo não-linear no espaço de estados na forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, u) \quad (2)$$

em que

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, u) = \begin{pmatrix} h_1(\mathbf{x}, u) \\ h_2(\mathbf{x}, u) \\ h_3(\mathbf{x}, u) \\ h_4(\mathbf{x}, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \beta_2(\mathbf{x}, u)/\lambda(\mathbf{x}) \\ x_4 \\ \beta_4(\mathbf{x}, u)/(l\lambda(\mathbf{x})) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\beta_2(\mathbf{x}, u) = -g \sin(x_3) \cos(x_3) + l \sin(x_3) x_4^2 + \frac{1}{m} u, \quad (4)$$

$$\beta_4(\mathbf{x}, u) = \frac{(M+m)g}{m} \sin(x_3) - l \sin(x_3) \cos(x_3) x_4^2 - \frac{\cos(x_3)}{m} u, \quad (5)$$

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{M}{m} + \sin^2(x_3). \quad (6)$$

### 3 - Estratégia de controle

A estratégia de controle adotada consiste em definir pontos de operação em função de valores desejados para a posição do carro (variável de estado  $x_1=d_{ref}$ ) e do ângulo da barra ( $x_3=0$ ) e regular o sistema linearizado em torno do ponto de operação. Assim, como em regime permanente as variáveis de estado correspondentes às velocidades devem ser nulas, o regime de operação é dado por

$$\bar{\mathbf{x}} = (d_{ref}, 0, 0, 0)$$

O valor  $\bar{u}$ , da entrada em regime permanente, deve satisfazer então a

$$\begin{pmatrix} h_1(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \\ h_2(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \\ h_3(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \\ h_4(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Ao resolver o conjunto de equações acima, determina-se o valor de  $\bar{u}$  esperado para quando o estado alcançar o estado  $\bar{\mathbf{x}}$ . Neste sistema, pode-se mostrar que  $\bar{u} = 0$ .

Em torno do regime permanente, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \bar{\mathbf{x}} + \delta_{\mathbf{x}} \\ u &= \bar{u} + \delta_u \end{aligned} \quad (8)$$

em que  $\delta_x$  e  $\delta_u$  são respectivamente vetor e escalar representando variação da variável de estado e da entrada com relação ao regime permanente. A dinâmica local (de pequenos sinais) do sistema é dada por

$$\dot{\delta}_x = \mathbf{A}\delta_x + \mathbf{B}\delta_u \quad (9)$$

em que as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são dadas por

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial h_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial h_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial h_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial h_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial h_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial h_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial h_3(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial h_4(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} \quad (11)$$

Define-se como objetivo da lei de controle fazer o sistema original dado pela eq. (2) operar em  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  para qualquer condição inicial  $\mathbf{x}_0$ . Entretanto, este objetivo não é simples de ser alcançado, uma vez que o sistema em questão é não-linear. Mas, supondo-se que a aproximação em pequenos sinais (8)-(9) seja satisfatória para toda a faixa de valores de  $\mathbf{x}$  e  $u$  que o sistema venha a operar, pode-se lançar mão da técnica de controle por modelo linearizado em torno do regime de operação. Neste sentido, definindo-se o erro de controle por

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} = \delta_x$$

Naturalmente,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\delta}_x \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\delta_u \end{aligned}$$

Definindo-se a realimentação de estado do sistema linearizado

$$\delta_u = -\mathbf{K}\mathbf{e}$$

então a dinâmica do erro é dada por

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{e} \quad (12)$$

Sendo (12) um sistema autônomo (sem entrada), se os auto-valores de  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$  possuírem parte real negativa, o sistema será estável. Isto significa que para qualquer condição inicial  $\mathbf{e}(0)$ , espera-se ter  $\mathbf{e}(\infty) = 0$ . Sendo assim, as componentes do vetor de erro tenderão a zero a uma taxa que depende apenas da locação dos auto-valores de  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ . No MATLAB, a alocação dos pólos da dinâmica do erro pode ser feita por meio da função `acker`.

A lei de controle para o sistema não linear pode ser dada por

$$u = \bar{N}d_{ref} - \mathbf{K}\mathbf{x}$$

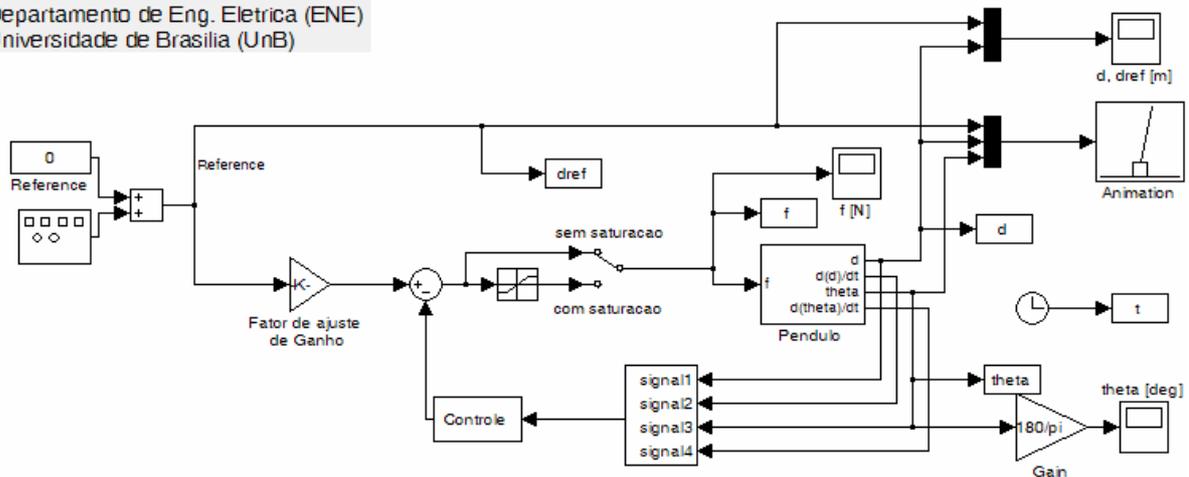
Onde  $\bar{N}$  é o fator de ajuste de ganho do controlador e

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \\ \mathbf{x} &= [d \quad \dot{d} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T \end{aligned}$$

Esta formulação explicita a influência da entrada de referência.

## 4 - Simulação

Processo: Pêndulo invertido  
 Laboratório de Controle Dinâmico  
 Departamento de Eng. Elétrica (ENE)  
 Universidade de Brasília (UnB)



Adaptado do demonstrador "pendemo" do Simulink

Fig.2 Janela da simulação do controle do pêndulo invertido no Simulink.

Este roteiro vem acompanhado da simulação que será usada no laboratório. Nele está o modelo não-linear do pêndulo invertido, a lei de controle, o gerador de referências, e um elemento que modela a saturação do atuador. Os parâmetros físicos do sistema estão definidos na seção 2. A simulação já vem com uma lei de controle com os seguintes valores:

$$\mathbf{K} = [-0,39579 \quad -0,48479 \quad -11,23256 \quad -1,60500]$$

Com este valor de  $\mathbf{K}$ , os pólos do sistema linearizado em malha fechada são aproximadamente  $p_{1,2} = -0,5 \pm i$ ,  $p_3 = -5,2$  e  $p_4 = -4,3$ . Isto pode ser verificado por meio do comando  $\text{eig}(\mathbf{A}-\mathbf{B}*\mathbf{K})$ . Portanto, o sistema está estabilizado, sendo  $p_{1,2}$  os pólos dominantes. Por outro lado, a resposta de  $x_1 = d$  apresenta sobre-sinal.

Por meio da função `acker` do MATLAB, o aluno pode alocar os pólos onde for desejado. No entanto, o aluno deve se certificar de que não esteja ocorrendo saturação do atuador. Na simulação, por meio de uma chave manual, é possível ativar ou desativar o elemento de saturação do atuador. Quando a saturação está desativada, é possível perceber a mudança de reposta dinâmica em função de diferentes amplitudes da referência. Em alguns casos, o carro não é mantido em pé. Com a saturação ativada, pode-se ter uma melhor percepção de sua influência na resposta dinâmica.

Por fim, sempre que o usuário desejar alterar o controlador e aplicar um novo valor da matriz  $\mathbf{K}$ , ele deverá alterar apropriadamente os parâmetros do bloco "Controle" e "Fator de Ajuste de Ganho".

## 5 – Pré-relatório

Para este experimento, faz-se necessário **um pré-relatório para cada grupo**. O pré-relatório contempla as seguintes questões:

1. Demonstre que o modelo em espaço de estados do sistema não linear é dado pelas equações (2)-(6).
2. Determine analiticamente as matrizes **A** e **B**.
3. Escreva uma rotina *m-script* (código Matlab) para determinar os valores numéricos das matrizes **A** e **B**, mostrar os pólos do sistema em malha aberta, calcular **K** em função dos requisitos de pólos em malha fechada e mostrar os autovalores de **A-BK**.

Para ajudar na verificação do cálculo analítico de **A** e **B**, faça uso das informações passadas na seção 4 sobre os pólos em malha fechada para o ganho **K** que vem com o simulador. Ao verificar este resultado, você minimiza o risco de não conseguir fazer o experimento por conta de algum erro de cálculo ou de programação.

## 6 - Procedimento de laboratório

Os seguintes procedimentos deverão ser seguidos neste experimento:

- 1) Implemente e simule um controlador onde o erro de seguimento apresente tempo de subida (10%-90%) menor ou igual a 7s, sem sobre-sinal. O controlador não deve fazer com que o atuador sature enquanto a simulação estiver em execução. Avalie o controlador no simulador, que está ajustado para alterar  $d_{ref}$  de -2m a +2m a cada 20s (aproximadamente). Salve as variáveis de interesse  $d$ ,  $t$ ,  $\theta$ ,  $f$  e  $d_{ref}$  em um arquivo (estas variáveis estão disponíveis no espaço de trabalho após concluída a simulação).
- 2) Altere a simulação de modo que  $d_{ref}$  passe a alternar de -5m a +5m. Repita a simulação com o mesmo controlador e compare os novos resultados com os anteriores, ativando ou desativando a saturação por meio da chave manual. Observou-se alguma diferença com relação àqueles parâmetros de resposta dinâmica que teoricamente não deveriam ser alterados com a mudança de amplitude de  $d_{ref}$ ? Se isto ocorreu, discuta as causas prováveis.

Para agilizar a realização do experimento, recomenda-se que o aluno traga consigo scripts MATLAB que façam os cálculos de projeto. Assim, se houver necessidade de fazer alguma alteração, os cálculos podem ser rapidamente executados.

## 7 - Relatório

O relatório deve apresentar de forma clara e direta um relato do que foi realizado no laboratório, fazendo uso sempre que possível de rigor teórico para explicar os procedimentos seguidos. São componentes importantes do relatório uma análise crítica dos resultados e das condições de experimentação.