Pós-Graduação em Eng. de Sistemas Eletrônicos e de Automação
Departamento de Engenharia Elétrica
Disciplina: Estimação e Filtragem Estocástica
Professor: Geovany Araújo Borges {gaborges@unb.br}

Universidade de Brasília

Nome: ______________________________ **Matrícula:** ____________

Lista de exercícios 2

Entrega até 12/06/2012, diretamente ao professor na aula. Após esta data, será descontado 1,0 ponto por dia útil de atraso. A apresentação da resolução pode ser feita a mão ou por computador, desde que seja sobre papel A4 com identificação do estudante e todas as folhas grampeadas.

Draft

1 Quesitos analíticos

1. Condiderando a notação de cálculo matricial adotada em [Simon, 2006], determine:

   (a) Verifique se a regra da cadeia segue a forma $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$

   (b) Verifique se $\frac{\partial (\mathbf{y}^T \mathbf{z})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{z}^T \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{y}^T \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}$

   (c) Considerando-se a função $y = f(x)$, tal que $f : R \to \mathbb{R}$, sabe-se que, usando expansão em série de Taylor, uma aproximação localmente linear é dada por

   $$y = f(\bar{x}) + (x - \bar{x}) \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}}. \tag{1}$$

   Agora, sendo $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ tal que $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, como deve ser escrita essa aproximação para o caso vetorial?

2. Considere o modelo de reta

   $$y = ax^2 + bx + \varepsilon \tag{2}$$

   com a e b sendo os parâmetros a serem estimados a partir de pares de medidas $Z_i = \{x_i, y_i\}$, e ε representa o erro de medição, suposto $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Portanto, o vetor de parâmetros é dado por $\boldsymbol{\theta} = (a, b)^T$.

   (a) Determine a fórmula de obtenção das estimativas $\hat{a}$ e $\hat{b}$ dos parâmetros que minimizam o critério quadrático ponderado

   $$V(Z, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mu_i (y_i - a x_i^2 - b x_i)^2 \tag{3}$$

   em que μ_i é um fator de ponderação de cada medida. Determine também as estimativas $\sigma_{\hat{a}}^2$ e $\sigma_{\hat{b}}^2$ das variâncias de $\hat{a}$ e $\hat{b}$ a partir de $V(Z, \hat{\boldsymbol{\theta}})$. Os resultados deste quesito devem ser analíticos e envolvendo diretamente as medidas escalares.

(b) Formule o problema na forma de máximo *a posteriori*, com o *a priori* dado por $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ tal que

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_0, \mathbf{P}_0), \tag{4}$$

$\bar{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\bar{a}_0, \bar{b}_0)$, e determine a fórmula das estimativas considerando que N medidas são obtidas.

(c) Inicialmente, o usuário dispõe de uma estimativa inicial $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ considerando que

$$\boldsymbol{\theta}_0 \sim \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0, \mathbf{P}_0). \tag{5}$$

Determine a fórmula recursiva de atualização das estimativas $\hat{a}$ e $\hat{b}$ dos parâmetros. Derive primeiro essa estimativa usando $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e em seguida obtenha especificamente a forma de atualização de $\hat{a}$ e $\hat{b}$. O algoritmo deve considerar a coleta de uma medida $Z_i = \{x_i, y_i\}$ por vez. Os resultados deste quesito devem ser analíticos e envolvendo diretamente as medidas escalares.

(d) Formule o problema na forma de máximo *a posteriori* $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ considerando que

$$\boldsymbol{\theta}_{i-1}|Z_1 \cdots Z_{i-1} \sim \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}, \mathbf{P}_{i-1}), \tag{6}$$

Inicialmente, tem-se $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\hat{a}_0, \hat{b}_0)$. Determine a fórmula de obtenção da estimativa $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ tendo a estimativa $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}$ como a priori e considerando uma medida $Z_i = \{x_i, y_i\}$ por vez.

(e) Compare as soluções das letras (c) e (d), identificando semelhanças nas formulas de atualização das estimativas. Existe alguma combinação de parâmetros para a qual os resultados de ambos os algoritmos sejam idênticos?

2 Questitos numéricos

1. Avalie o estimador da questão 2a com uma simulação em MATLAB considerando que o valor real dos parâmetros seja $\boldsymbol{\theta} = (1, 2)^T$, gerando $N = 20$ medidas para valores de x igualmente espaçados no intervalo $[0, 10]$, $\sigma_\varepsilon^2 = 5$, $\mu_i = 1$ para $i = 1, \ldots, N$. Mostre gráficos de $V(Z, \theta)$ obtido para valores de a e b no intervalo $[0, 3]$, e da curva dos parâmetros estimados com os dados mensurados. Comente os resultados.

2. Considerando o estimador da questão 2a, sendo $\boldsymbol{\theta} = (1, 2)^T$ o valor real dos parâmetros, $\sigma_\varepsilon^2 = 5$ e $\mu_i = 1$, faça uma simulação para validar as estimativas $\sigma_{\hat{a}}^2$ e $\sigma_{\hat{b}}^2$. Para tanto, faça $M = 100$ simulações do estimador, cada uma para com $N = 200$ novos dados $\{x_i, y_i\}$ gerados, e obtenha $\sigma_{\hat{a}}^2(m)$ e $\sigma_{\hat{b}}^2(m)$, $m = 1, \ldots, M$. Mostre um gráfico com as curvas $+3\sigma_{\hat{a}}(m)$, $-3\sigma_{\hat{a}}(m)$ e $\hat{a}(m) - a$. Monte o mesmo gráfico para a estimativa de b. Por meio da observação desses gráficos, discorra sobre a validade das estimativas $\sigma_{\hat{a}}^2$ e $\sigma_{\hat{b}}^2$.

3. Considerando o estimador da questão 2a, sendo $\boldsymbol{\theta} = (1, 2)^T$ o valor real dos parâmetros, $\sigma_\varepsilon^2 = 5$ e $\mu_i = 1$, faça uma simulação para avaliar o comportamento assintótico da qualidade das estimativas com o aumento de N. Para tanto, construa gráficos da evolução de $\sigma_{\hat{a}}$ e $\sigma_{\hat{b}}$ em função de N, que deverá variar de 5 a 200. Para cada valor de N, novas medidas $Z_i = \{x_i, y_i\}$ devem ser geradas. Comente os resultados.

4. Para o estimador da questão 2b, faça uma simulação em MATLAB para avaliar a influência de $\mathbf{P}_0$ na estimativa final. Para tanto, considere que o valor real dos parâmetros seja $\boldsymbol{\theta} = (1, 2)^T$, $N = 100$, $\bar{\boldsymbol{\theta}}_0 = (0, 0)^T$ e $\mathbf{P}_0 = \mathbb{I}_2\lambda/10$. Use gráficos para mostrar a evolução de $\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e de $\bar{\boldsymbol{\theta}}_0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}$ para cada λ de 1 a 200. Comente os resultados.

Draft

5. Para o estimador da questão 2d, faça uma simulação em MATLAB para avaliar a influência de σ_ε^2 na estimativa final. Para tanto, considere que o valor real dos parâmetros seja $\boldsymbol{\theta} = (1,2)^T$, $N = 100$, $\bar{\boldsymbol{\theta}}_0 = (0,0)^T$ e $\mathbf{P}_0 = \mathbb{I}_2/10$. Use gráficos para mostrar a evolução de $\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e de $\bar{\boldsymbol{\theta}}_0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}$ para cada σ_ε^2 variando na faixa que julgar suficiente para ilustrar as propriedades desse estimador. Comente os resultados.

Referências

[Simon, 2006] Simon, D. (2006). *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞, and Nonlinear Approaches.* Wiley-Interscience.

Draft