Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Departamento de Engenharia Elétrica
Disciplina: Estimação e Filtragem Estocástica
Professor: Geovany Araújo Borges {gaborges@unb.br}

Nome: ______________________________ **Matrícula:** ____________

Lista de exercícios 1

Entrega até 24/04/2012, diretamente ao professor na aula. Após esta data, será descontado 1,0 ponto por dia útil de atraso. A apresentação da resolução pode ser feita a mão ou por computador, desde que seja sobre papel A4 com identificação do estudante e todas as folhas grampeadas.

1 Quesitos analíticos

1. Prove as seguintes relações usando axiomas da probabilidade:

   (a) Sendo A, B e C três eventos do espaço de probabilidade Ω, então

   $$\Pr\{A\cup B\cup C\} = \Pr\{A\}+\Pr\{B\}+\Pr\{C\}-\Pr\{A\cap B\}-\Pr\{A\cap C\}-\Pr\{B\cap C\}+\Pr\{A\cap B\cap C\}$$

   (b) Sendo A, B e C três eventos do espaço de probabilidade Ω, então

   $$\Pr\{A \cup B \cup C\} \leq \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{C\}$$

2. Sendo $\Pr\{A\} = 1/2$, $\Pr\{B\} = 2/3$ e $\Pr\{A \cup B\} = 3/4$ e Ω o espaço de probabilidade. Calcule:

   (a) $\Pr\{\Omega|B\} - \Pr\{\Omega|A\}$
   (b) $\Pr\{A|B\}$
   (c) $\Pr\{B|A\}$
   (d) $\Pr\{\bar{A} \cap B\}$ com $\bar{A} = \Omega - A$ sendo o complementar de A

3. Considere três caixas contendo transistores: a caixa 1 contém 20% de transistores bons; a caixa 2 contém 70% de transistores bons e a caixa 3 contém 40% de transistores bons. Seja $\Pr\{C_1\} = 0,35$, $\Pr\{C_2\} = 0,25$ e $\Pr\{C_3\} = 0,4$ as probabilidades correspondentes à retirada de um transistor (bom ou ruim) das caixas 1, 2 e 3 , respectivamente. Se um transistor bom for obtido de uma das caixas, qual seria a caixa mais provável de ter sido aquela de onde o transistor foi retirado? Sugestão: aplique o teorema de Bayes, e escolha a caixa i com maior $\Pr\{C_i|B\}$, com B sendo o evento de se obter um bom transistor.

4. Considere X uma v.a. com FDP $p_X(x)$ dada por

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & , -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Determine $\Pr\{X(\omega) > 0\}$, $\Pr\{X(\omega) < 0,5\}$ e $\Pr\{|X(\omega)| > 0,75\}$.

5. Considere a seguinte função:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 2 \\ \frac{1}{4} + \frac{c}{2}(x+2)^2 & , 0 \leq x < 2 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

com c sendo uma constante real. Determine o(s) valor(es) de c de forma que $F_X(x)$ seja uma função de distribuição de uma va X.

6. Considere $X \sim N(0,1)$. Mostre que para qualquer $x > 0$

$$\Pr\{|X(\omega)| \leq x\} = 2\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2})dt - 1$$

7. Considerando $a \neq 0$, b e c constantes reais, determine $\Pr\{aX^2 + bX + c < 0\}$ em função da função de distribuição $F_X(x)$ de X.

8. Sendo $F_{X,Y}(x,y) = (1-e^{-x})(1-e^{-y})$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, determine $p_{X,Y}(x,y)$, e as densidades marginais de X e Y. Estas v.a.s são independentes? Justifique sua resposta.

9. Considere X uma v.a. com distribuição gaussiana bivariada cujos parâmetros são

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_X &= \begin{pmatrix} 1 & 0,2 \\ 0,2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para cada transformação abaixo, determine a FDP de Y, seu tipo de distribuição (e.g., binomial, gaussiana, etc.) e os parâmetros da distribuição.

(a) $Y = \mathbf{P}_X^{-1/2} \cdot (X - E\{X\})$

(b) $Y = |X - E\{X\}|^2$, em que $|\cdot|$ é o módulo vetorial.

10. Seja $X \sim U(-2\pi, 2\pi)$. Encontre $p_Y(y)$ se

(a) $Y = X^4$

(b) $Y = \sin(3X)$.

2 Quesitos numéricos

1. Considerando o problema 9, realize simulações de Y obtidas para 5000 amostras de X de acordo com as transformações (a) e (b) daquele problema. Para cada caso, faça:

   (a) Apresente gráficos $Y_1 \times Y_2$ das componentes da amostras de Y para cada transformação.

   (b) Apresente gráficos superpondo a FDP esperada e a FDP estimada por meio de histograma.

   Avalie os resultados obtidos. Apresente o código de simulação.

2. Seja $X \sim U(0,1)$, determine a FDP de $Y = -\ln(X)$. Proponha um gerador de amostras de Y usando a sua FDP. Determine analiticamente $E\{Y\}$ e $var\{Y\}$, e compare com estimativas amostrais. Apresente o código de simulação.

3. Implementar um estimador $\hat{\pi}$ para o número π usando a seguinte ideia: "ao se gerar um ponto de coordenadas (u_1, u_2) com $u_1, u_2 \sim U(-1,1)$, a probabilidade desse ponto se encontrar dentro do circulo de raio unitário centrado na origem é igual à razão entre a área do círculo e a área da região domínio de (u_1, u_2)". Use portanto N amostras para obter tal estimativa e calcule o erro $\varepsilon(N) = \pi - \hat{\pi}(N)$. Mostre a curva de evolução do erro em função de diferentes valores de N. Avalie os resultados obtidos. Apresente o código de simulação.

Referências