



Disciplina Tópicos em Controle de Processos 2
 Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
 Departamento de Engenharia Elétrica
 Universidade de Brasília

Problema de controle: pêndulo invertido

Geovany A. Borges
 gaborges@ene.unb.br

1 Modelagem dinâmica

As equações de movimento de um pêndulo invertido conforme mostrado na Figura 1 são:

$$(M + m)\ddot{x} = f - b\dot{x} - ml\ddot{\theta}\cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) \quad (1)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} = -ml\ddot{x}\cos(\theta) - mgl\sin(\theta). \quad (2)$$

Nessas equações, tem-se: M : Massa do carro; m : Massa da barra do pêndulo; b : Coeficiente de fricção do carro; l : distância do centro de massa do pêndulo com relação ao ponto de fixação no carro; I : momento de inércia do pêndulo; g : aceleração da gravidade; f : Força exercida para mover o sistema; x : posição do carro; θ : ângulo do pêndulo com relação à vertical. Devido às limitações físicas, tem-se $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ e $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$, com $\theta = \pi$ sendo o ângulo correspondente a pêndulo na posição vertical. Ainda, o atuador somente pode aplicar f no intervalo $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$.

Ao escolher como variáveis de estado $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$ e $x_4 = \dot{\theta}$, organizadas no vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$,

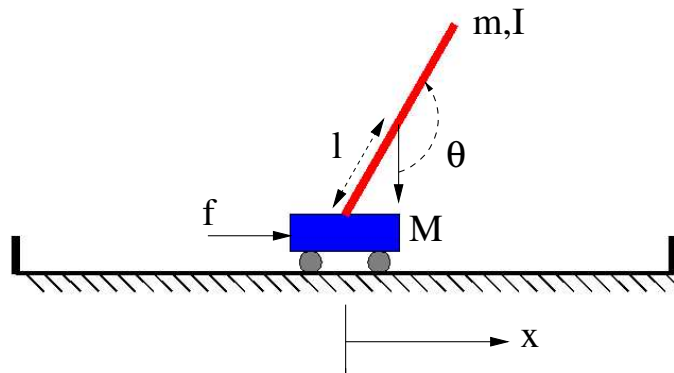


Figura 1: Parâmetros do pêndulo invertido.

e $u = f$ sendo a entrada, obtem-se o seguinte modelo em espaço de estados:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \beta_2(\mathbf{x}, u)/\lambda \\ x_4 \\ \beta_4(\mathbf{x}, u)/\lambda \end{pmatrix} \quad (3)$$

com

$$\beta_2(\mathbf{x}, u) = m^2 l^2 g \sin(x_3) \cos(x_3) - (I + ml^2) b x_2 - (I + ml^2) m l \sin(x_3) x_4^2 + (I + ml^2) u; \quad (4)$$

$$\beta_4(\mathbf{x}, u) = -(M + m) m g l \sin(x_3) + m l b \cos(x_3) x_2 + m^2 l^2 \sin(x_3) \cos(x_3) - m l \cos(x_3) u; \quad (5)$$

$$\lambda = (I + ml^2)(M + m) - m^2 l^2 \cos^2(x_3). \quad (6)$$

Como medições disponíveis para o usuário, tem-se o seguinte modelo

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_\theta \end{pmatrix}, \quad (7)$$

com $v_x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)$ e $v_\theta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\theta^2)$ sendo variáveis aleatórias que representam as incertezas de medição de x e θ , respectivamente.

2 Simulação MATLAB

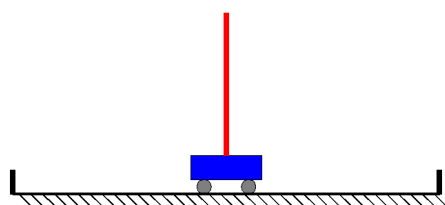
Os arquivos abaixo acompanham este documento:

- `penduloinvertido_iniciar.m`: função que define os parâmetros e inicia as principais variáveis do sistema;
- `penduloinvertido_desenhar.m`: função que desenha o pêndulo a partir do seu estado atual;
- `penduloinvertido_simular.m`: função que simula o pêndulo no tempo contínuo. Por enquanto, foi usado o método de Euler a um passo de integração 20 vezes inferior ao passo de amostragem da simulação digital;
- `mexpenduloinvertido.c` e `mexpenduloinvertido.dll`: arquivo fonte e mex função que integram o modelo do sistema;
- `sim_malhaaberta.m`: exemplo de simulação do pêndulo, mas em malha aberta.

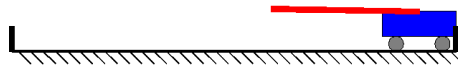
Na simulação apresentada a seguir, os parâmetros usados para o pêndulo foram: $m = 0,2 \text{ kg}$, $M = 0,5 \text{ kg}$, $b = 0,2 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$, $l = 0,3 \text{ m}$, $I = 0,006 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Com relação aos limites físicos, $x_{\min} = -0,75 \text{ m}$, $x_{\max} = 0,75 \text{ m}$, $\theta_{\min} = 91^\circ$ e $\theta_{\max} = 269^\circ$. Para o atuador, $f_{\min} = -10 \text{ N}$ e $f_{\max} = 10 \text{ N}$. Os ruídos de medição são caracterizados por $\sigma_x = 0,3 \text{ cm}$ e $\sigma_\theta = 0,2^\circ$.

A Figura 2 apresenta os resultados de simulação obtidos para uma força f agindo no pêndulo conforme a seguinte lei:

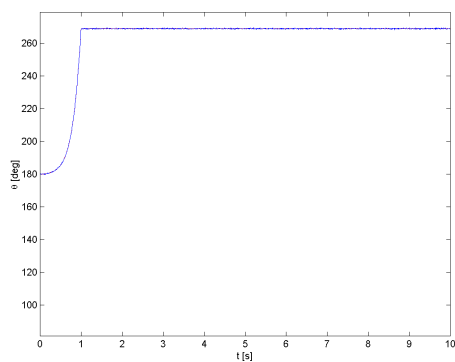
$$f = \begin{cases} 0,1 \text{ N} & \text{para } t < 2,5 \text{ s} \\ 0 \text{ N} & \text{para } t \geq 2,5 \text{ s} \end{cases}. \quad (8)$$



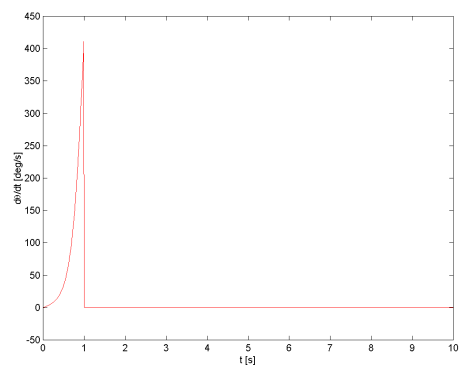
(a) Pêndulo no início da simulação



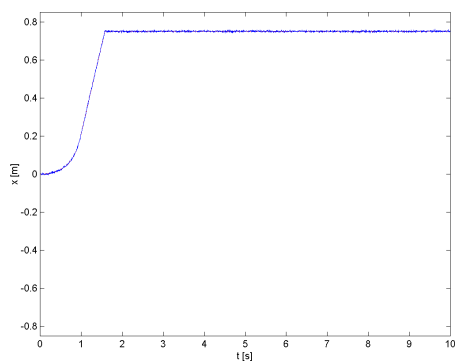
(b) Pêndulo no final da simulação



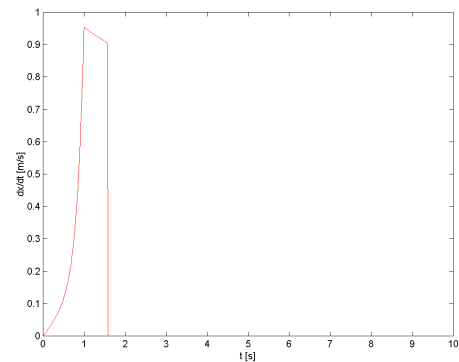
(c) θ



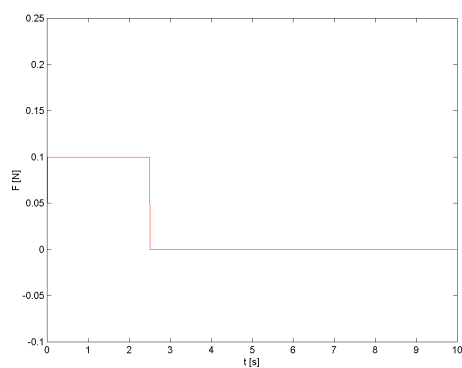
(d) $\dot{\theta}$



(e) x



(f) $\dot{x}$



(g) f

Figura 2: Resultados de simulação do pêndulo invertido.