Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília

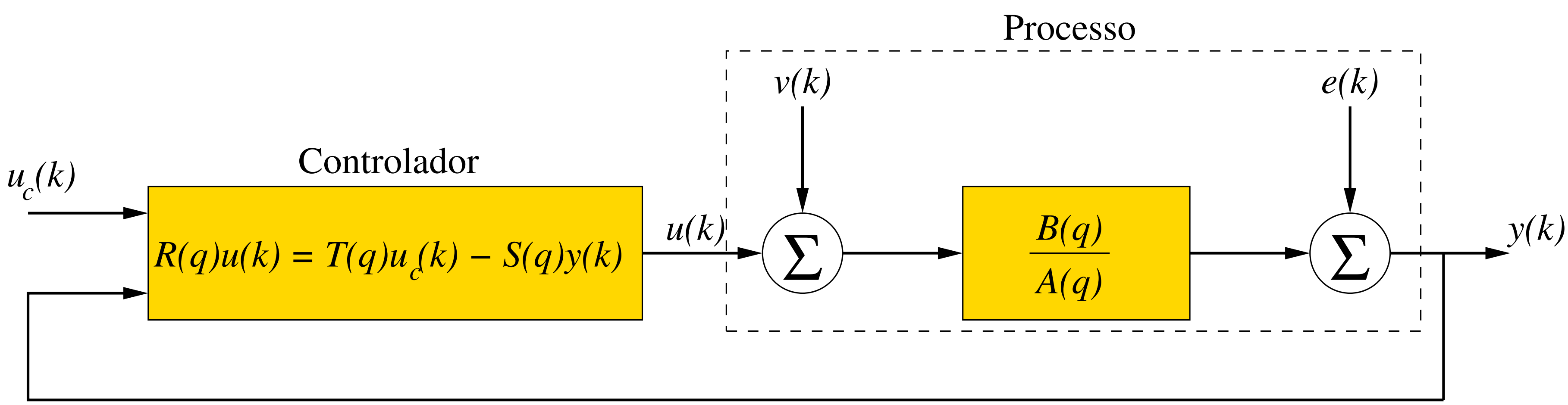
Tópicos em Controle de Processos 2

Controle polinomial

Geovany A. Borges
gaborges@ene.unb.br

Introdução

- Malha de controle (processo SISO)

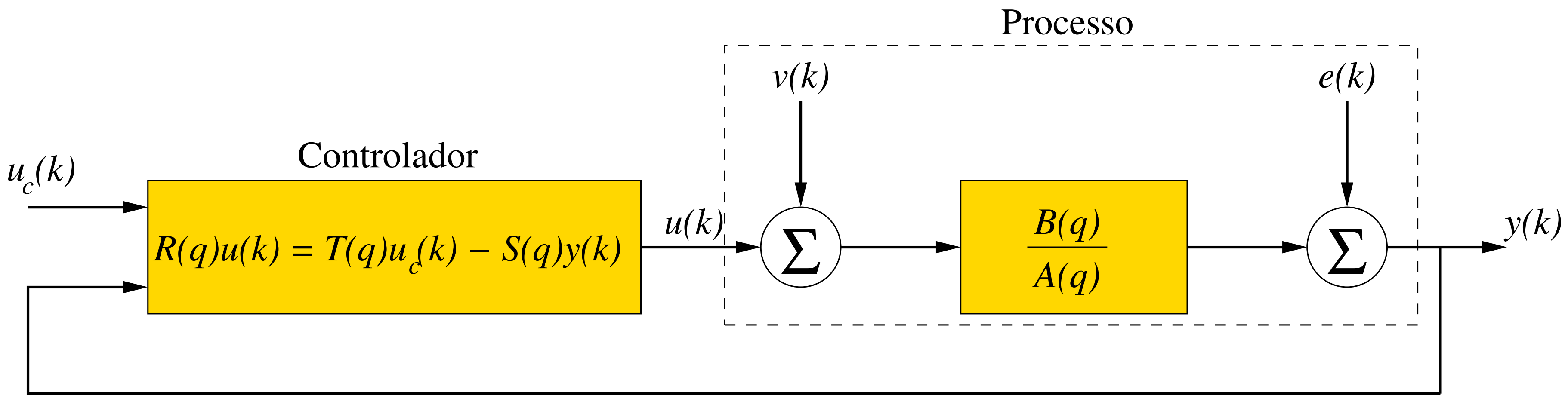


- Malha aberta

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}. \tag{1}$$

Introdução

- Malha de controle (processo SISO)



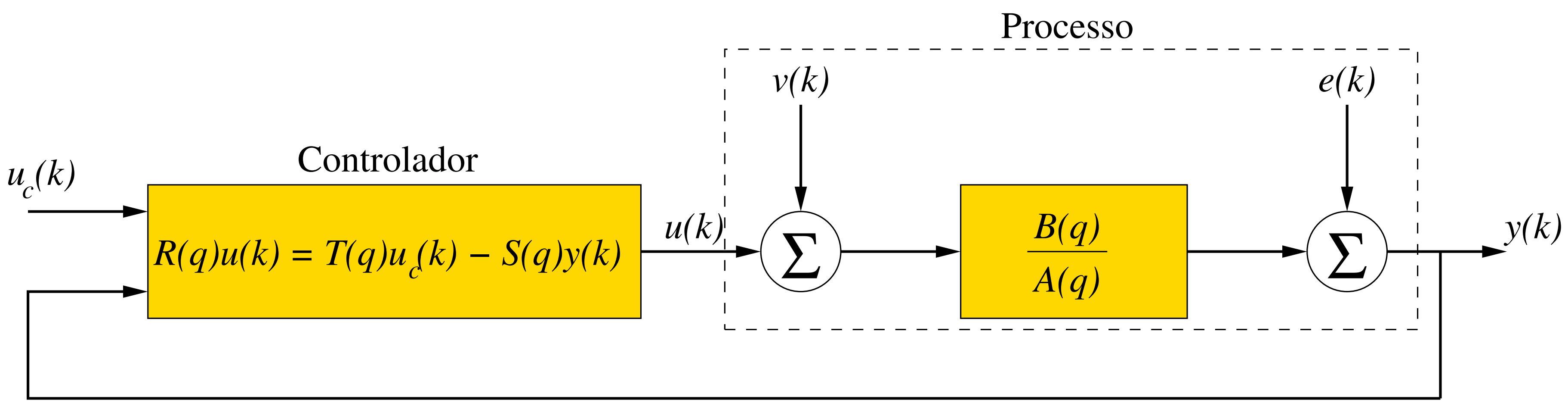
  - Lei de controle

$$u(k) = \frac{T(q)}{R(q)}u_c(k) - \frac{S(q)}{R(q)}y(k). \quad (2)$$

$$H_{ff}(z) = \frac{T(z)}{R(z)} \qquad H_{fb}(z) = \frac{S(z)}{R(z)} \quad (3)$$

Introdução

■ Malha de controle (processo SISO)



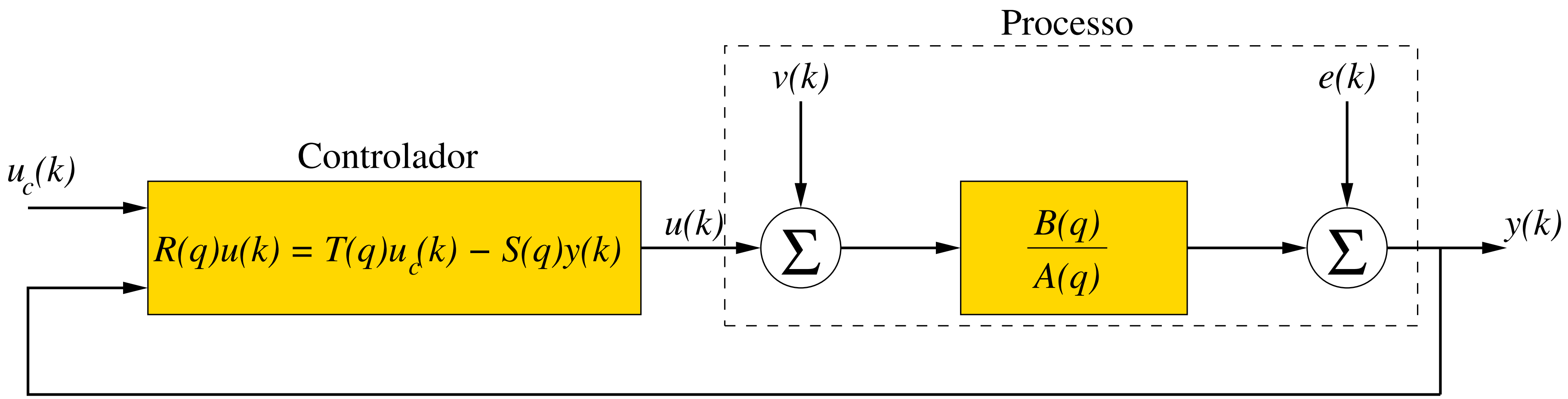
- Malha fechada

$$y = \frac{BT}{AR+BS}u_c + \frac{BR}{AR+BS}v + \frac{AR}{AR+BS}e \tag{4}$$

Observação 1. *Relação entre R e as invertezas e perturbações*

Introdução

■ Malha de controle (processo SISO)

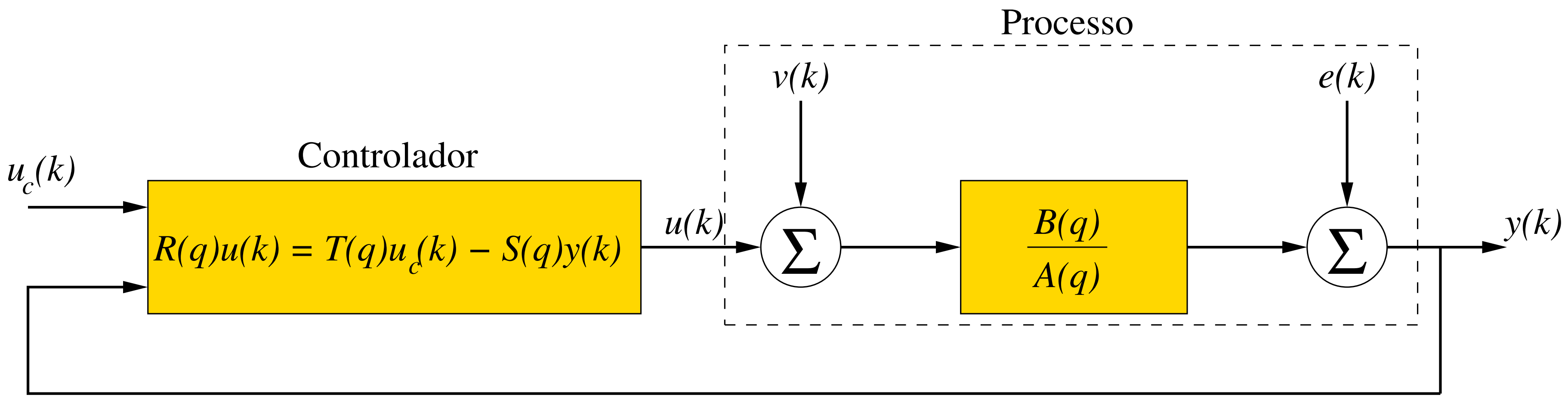


- Função de transferência (problema de rastreamento, ou servocontrole)

$$y(k) = \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} u_c(k) \tag{5}$$

Introdução

- Malha de controle (processo SISO)



- Modelo de referência

$$y(k) = H_m(q)u_c(k) \text{ com } H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \tag{6}$$

$$\text{Problema de projeto} \implies \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} \tag{7}$$

Projeto de controladores polinomiais

Exemplo 1. *Controle direto*

Com $R(q) = B(q)A_m(q)$, $S(q) = 0$ e $T(q) = A(q)B_m(q)$, tem-se

$$u(k) = \frac{A(q)B_m(q)}{B(q)A_m(q)}u_c(k) \tag{8}$$

Propriedades:

- ▶ Cancelamento direto dos pólos e zeros do processo (com modelos exatos)
- ▶ Risco de não-causalidade. Por exemplo:

$$\deg(A) = 2, \deg(B) = 0, \deg(A_m) = 2, deg(B_m) = 1$$

- ▶ Risco de instabilidade da lei de controle (sistema de fase não mínima).

Projeto de controladores polinomiais

- Condições impostas
  - Lei de controle:

$$u(k) = \frac{T(q)}{R(q)}u_c(k) - \frac{S(q)}{R(q)}y(k). \tag{9}$$

  - Causalidade:

$$\deg(R) \geq \deg(T) \qquad \text{e} \qquad \deg(R) \geq \deg(S) \tag{10}$$

  - Influência do tempo de cálculo da lei de controle T_c:

$$\begin{cases} \deg(R) = \deg(T) = \deg(S) & \text{se } T_c \text{ muito pequeno} \\ \deg(R) = \deg(T) + 1 = \deg(S) + 1 & \text{senão} \end{cases} . \tag{11}$$

Projeto de controladores polinomiais

■ Cancelamento de pólos e zeros

▷ Pólos de malha fechada: $AR + BS = 0$.

▷ Zeros de malha fechada: $BT = 0$.

De modo a satisfazer

$$\frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} \tag{12}$$

deve haver cancelamento de pólos e zeros.

Projeto de controladores polinomiais

Seja

$$B(q) = B^{+}(q)B^{-}(q), \tag{13}$$

com $B^{+}(q)$ contendo zeros estáveis (polinômio mônico), e $B^{-}(q)$ contendo zeros instáveis.

$B^{-}(q)$ não pode ser fator de $AR + BS$ (instabilidade malha fechada), então deve-se aceitar

$$B_m(q) = B^{-}(q)B'_m(q) \tag{14}$$

Assim, somente os zeros de $B^{+}(q)$ podem ser cancelados. Portanto,

$$R(q) = B^{+}(q)R'(q). \tag{15}$$

Projeto de controladores polinomiais

Com as substituições acima,

$$\frac{B_m(q)}{A_m(q)} = \frac{B^+(q)B^-(q)T(q)}{A(q)B^+(q)R'(q) + B^+(q)B^-(q)S(q)} = \frac{B^-(q)B'_m(q)}{A_m(q)}, \tag{16}$$

o que reduz o problema a

$$\frac{T(q)}{A(q)R'(q) + B^-(q)S(q)} = \frac{B'_m(q)}{A_m(q)}. \tag{17}$$

Um excesso de pólos-zeros pode ser incluído sob a forma do polinômio A_o:

$$T(q) = B'_m(q)A_o(q) \tag{18}$$

$$A(q)R'(q) + B^-(q)S(q) = A_m(q)A_o(q) \tag{19}$$

Projeto de controladores polinomiais

A equação característica é portanto dada por

$$A(q)R(q)+B(q)S(q)=B^{+}(q)A_o(q)A_m(q). \tag{20}$$

onde $B^{+}(q)A_o(q)$ serão cancelados com os zeros de $B(q)T(q)$.

Em suma: Resolver simultaneamente

$\triangleright$ $A(q)R'(q)+B^{-}(q)S(q)=A_m(q)A_o(q)$.

$\triangleright$ $R(q)=B^{+}(q)R'(q)$.

$\triangleright$ $T(q)=B'_m(q)A_o(q)$.

Projeto de controladores polinomiais

- Equação de Diophantine.
  - Problema algébrico: encontrar polinômios X e Y tais que

$$AX + BY = C \tag{21}$$

    com A, B e C sendo também polinômios.
  - Solução somente se o maior fator comum de A e B é um divisor de C (Teorema 10.1, pp. 292).
  - Se X_0 e Y_0 são soluções, então $X = X_0 + QB$ e $Y = Y_0 - QA$ também o são (Q arbitrário).
  - Existem soluções únicas tais que $\deg(X) < \deg(B)$ ou $\deg(Y) < \deg(A)$.

Projeto de controladores polinomiais

- Procedimento de projeto
  - Número infinito de soluções requer a inclusão de restrições
  - Causalidade:
    - Teorema 10.2: Existe uma solução causal se

$$\deg(A_m) - \deg(B_m) \geq \deg(A) - \deg(B) \tag{22}$$

e

$$\deg(A_o) \geq 2\deg(A) - \deg(A_m) - \deg(B^+) - 1. \tag{23}$$

  - Alto ganho em baixas freqüências:

$$R(q) = (q-1)^l R_1 = (q-1)^l R_1'(q) B^+(q) \tag{24}$$

isto implica que para manter a causalidade:

$$\deg(A_o) \geq 2\deg(A) - \deg(A_m) - \deg(B^+) + l - 1 \tag{25}$$

Projeto de controladores polinomiais

- Algoritmo:
  - Dados: A, B, A_o, A_m, B_m, tais que

$$\begin{aligned} B_m &= B^- B'_m, & (26) \\ \deg(A_m) - \deg(B_m) &\geq \deg(A) - \deg(B) & (27) \\ \deg(A_o) &\geq 2\deg(A) - \deg(A_m) - \deg(B^+) + l - 1 & (28) \end{aligned}$$

Projeto de controladores polinomiais

- Algoritmo:
  - Procedimentos:

    I. Fatorar B e B_m: $B = B^- B^+$ e $B_m = B^- B'_m$ (B^+ mônico)

    II. Resolver o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
(z-1)^l A(q) R'_1(q) + B^-(q) S(q) &= A_o(q) A_m(q) && (29)\\
\deg(S) &< l + \deg(A) && (30)\\
\deg(R'_1) &= \deg(A_o) + \deg(A_m) - \deg(A) - l && (31)
\end{aligned}$$

    III. Com $R(q) = B^+(q) R'(q)$, $T(q) = B'_m(q) A_o(q)$ e $R'(q) = (q-1)^l R'_1(q)$, aplicar como lei de controle

$$u(k) = \frac{T(q)}{R(q)} u_c(k) - \frac{S(q)}{R(q)} y(k) \tag{32}$$

Projeto de controladores polinomiais

Exemplo 2. *Exemplo 10.5 do livro texto: controle de motor CC*

Modelo do motor:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)} \tag{33}$$

Modelo de referência:

$$H_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{34}$$

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{z(1+p_1+p_2)}{z^2 + p_1 z + p_2} \tag{35}$$

com $p_1 = -2e^{\zeta\omega_n T}\cos(\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2})$ e $p_2 = e^{-2\zeta\omega_n T}$.

Projeto de controladores polinomiais

Fatoração de $B(z)$ para cancelar o zero estável $z = b$:

$$B^+(z) = z - b \tag{36}$$
$$B^-(z) = K \tag{37}$$

resultando em $B'_m(z) = B_m(z)/B^-(z) = z(1 + p_1 + p_2)/K$.

Como $\deg(A_o) \geq 2\deg(A) - \deg(A_m) - \deg(B^+) + l - 1 = 0$, sugere–se $A_o(z) = 1$

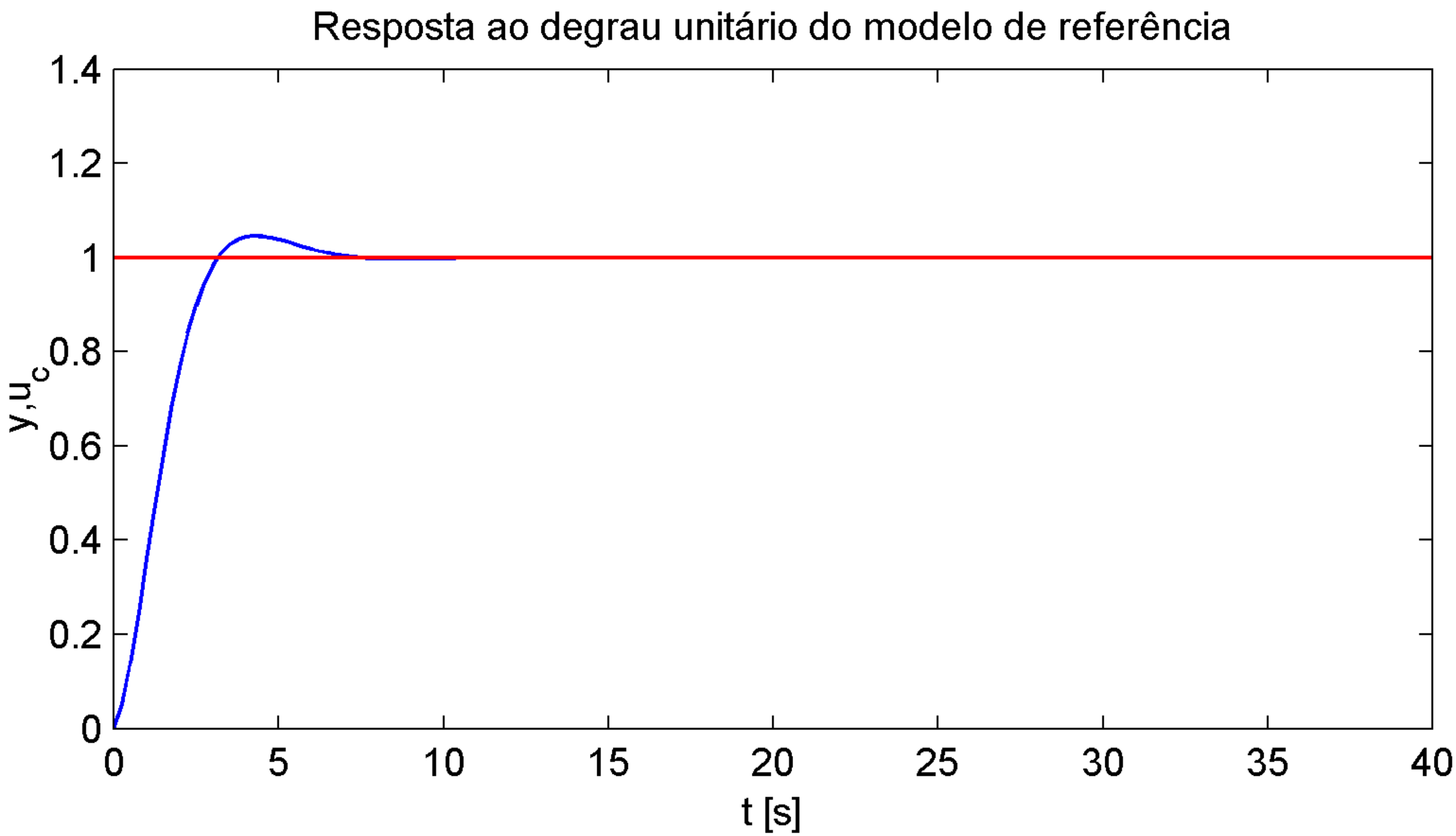
Sendo $\deg(R'_1) = 0$ e $\deg(S) = 1$:

$$R'_1(z) = r_0 \tag{38}$$
$$S(z) = s_0 z + s_1 \tag{39}$$

Resolvendo (29), resulta em $r_0 = 1$, $s_0 = (p_1 + a + 1)/K$ e $s_1 = (p_2 - a)/K$.

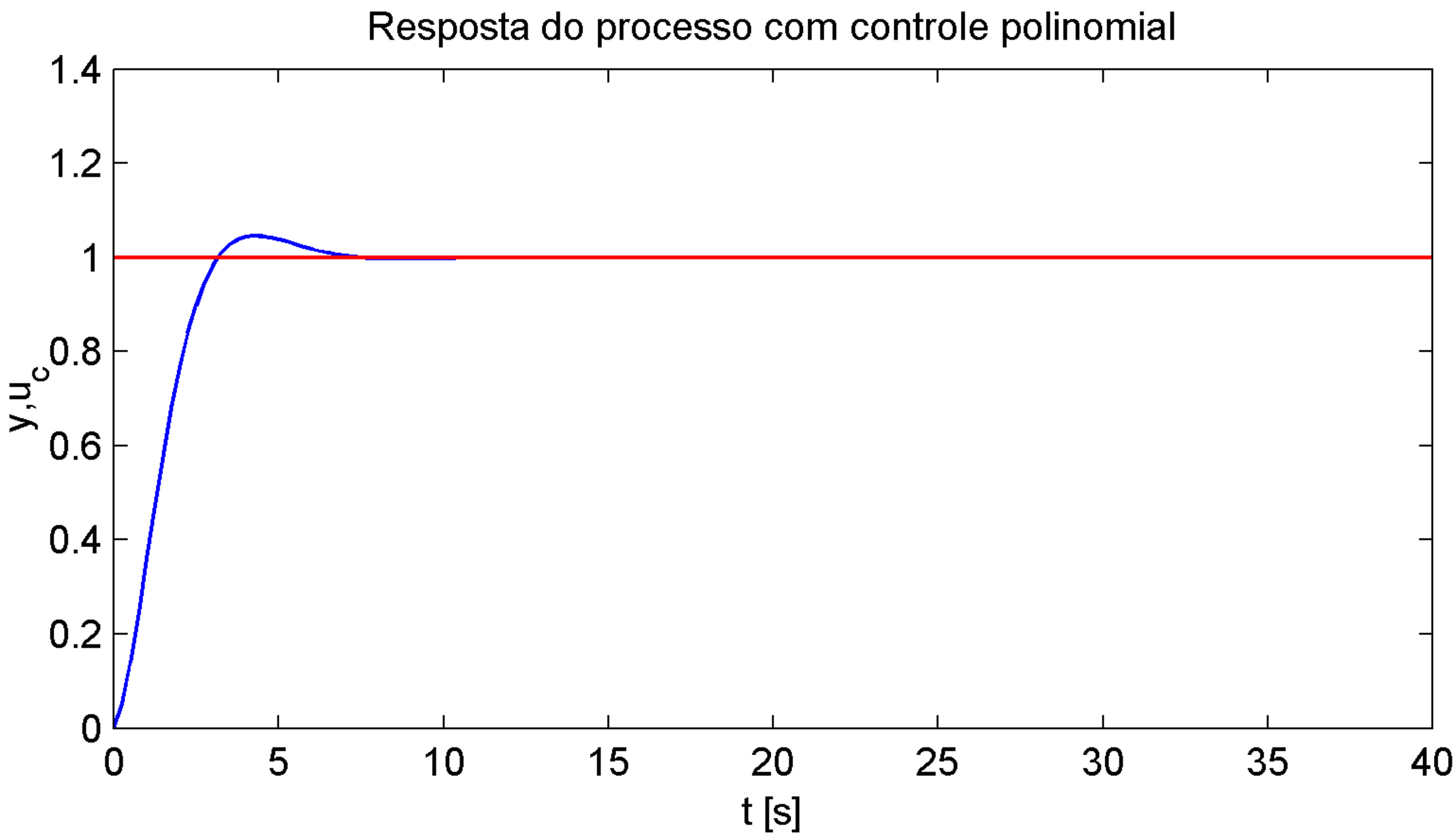
Projeto de controladores polinomiais

Resultados (1/3)



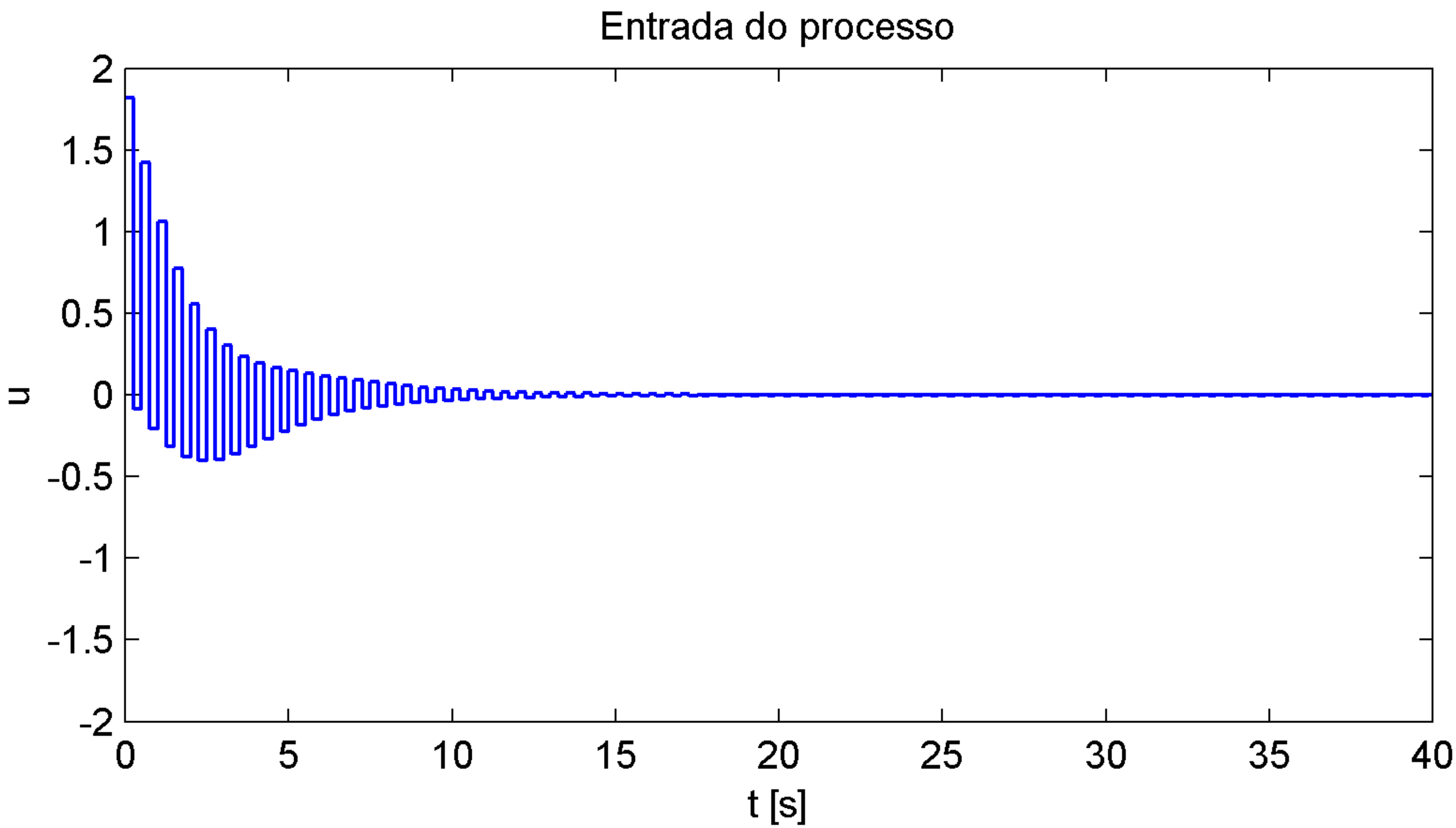
Projeto de controladores polinomiais

Resultados (2/3)



Projeto de controladores polinomiais

Resultados (3/3) - Entrada oscilatória devido ao pólo $z = b$ de $R(z)$.



Projeto de controladores polinomiais

Exemplo 3. *Exemplo 10.6 do livro texto: controle de motor CC sem cancelamento de zero*

Modelo do motor:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)} \tag{40}$$

Modelo de referência:

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{(1+p_1+p_2)}{1-b}\frac{z-b}{z^2+p_1z+p_2} \tag{41}$$

com $p_1 = -2e^{\zeta\omega_n T}\cos(\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2})$ e $p_2 = e^{-2\zeta\omega_n T}$.

Projeto de controladores polinomiais

Fatoração de $B(z)$ de forma a não cancelar o zero estável $z = b$:

$$B^+(z) = 1 \tag{42}$$

$$B^-(z) = K(z-b) \tag{43}$$

resultando em $B'_m(z) = B_m(z)/B^-(z) = (1+p_1+p_2)/(K(1-b))$.

Como $\deg(A_o) \geq 2\deg(A) - \deg(A_m) - \deg(B^+) + l - 1 = 1$, sugere–se $A_o(z) = z$

Sendo $\deg(R'_1) = 1$ e $\deg(S) = 1$:

$$R(z) = R'_1(z) = z + r_1 \tag{44}$$

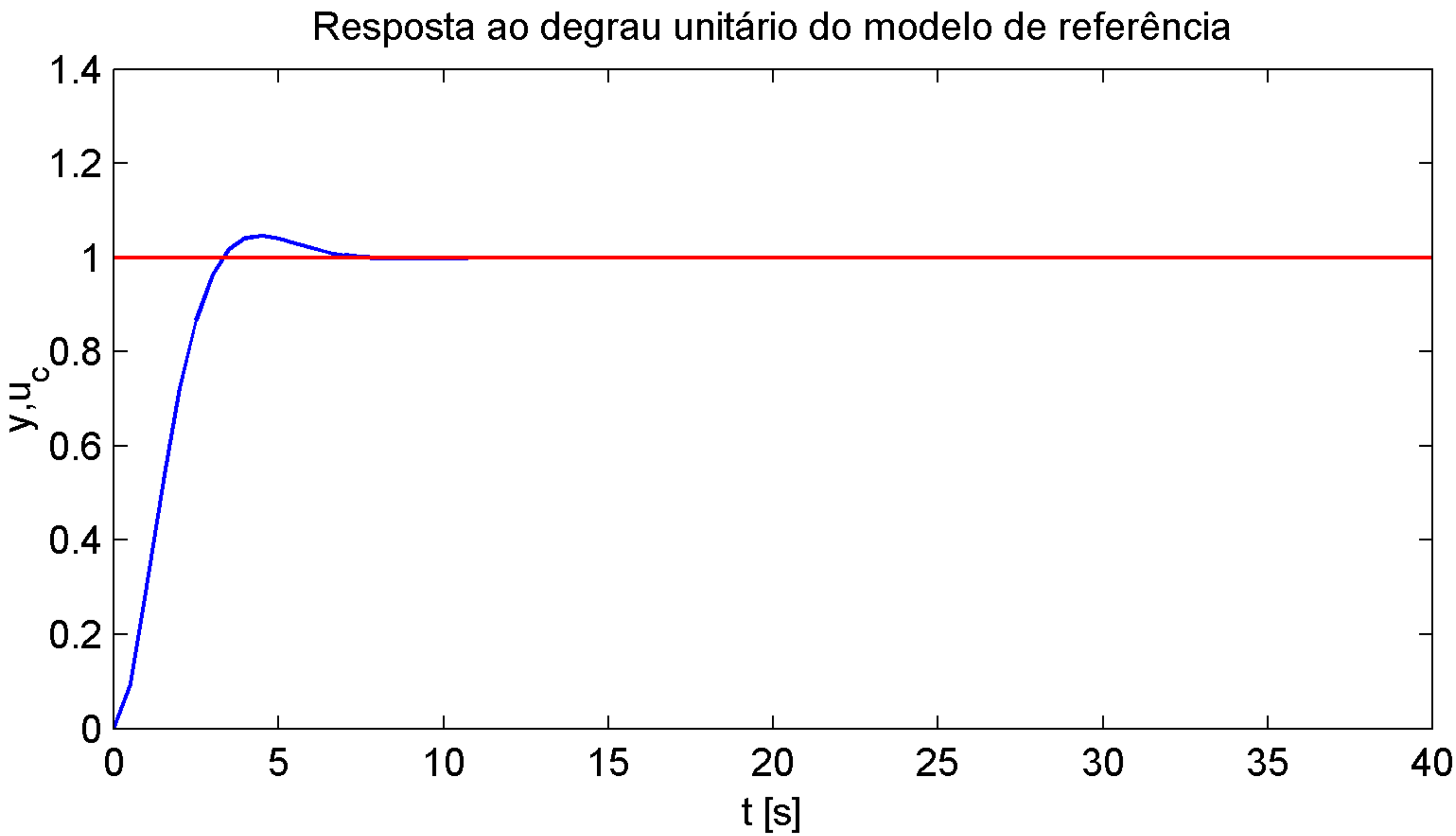
$$S(z) = s_0 z + s_1 \tag{45}$$

$$T(z) = t_0 z \tag{46}$$

Resolvendo (29) e $T(z) = B'_m(z) A_o(z)$, obtem-se os parâmetros do controlador.

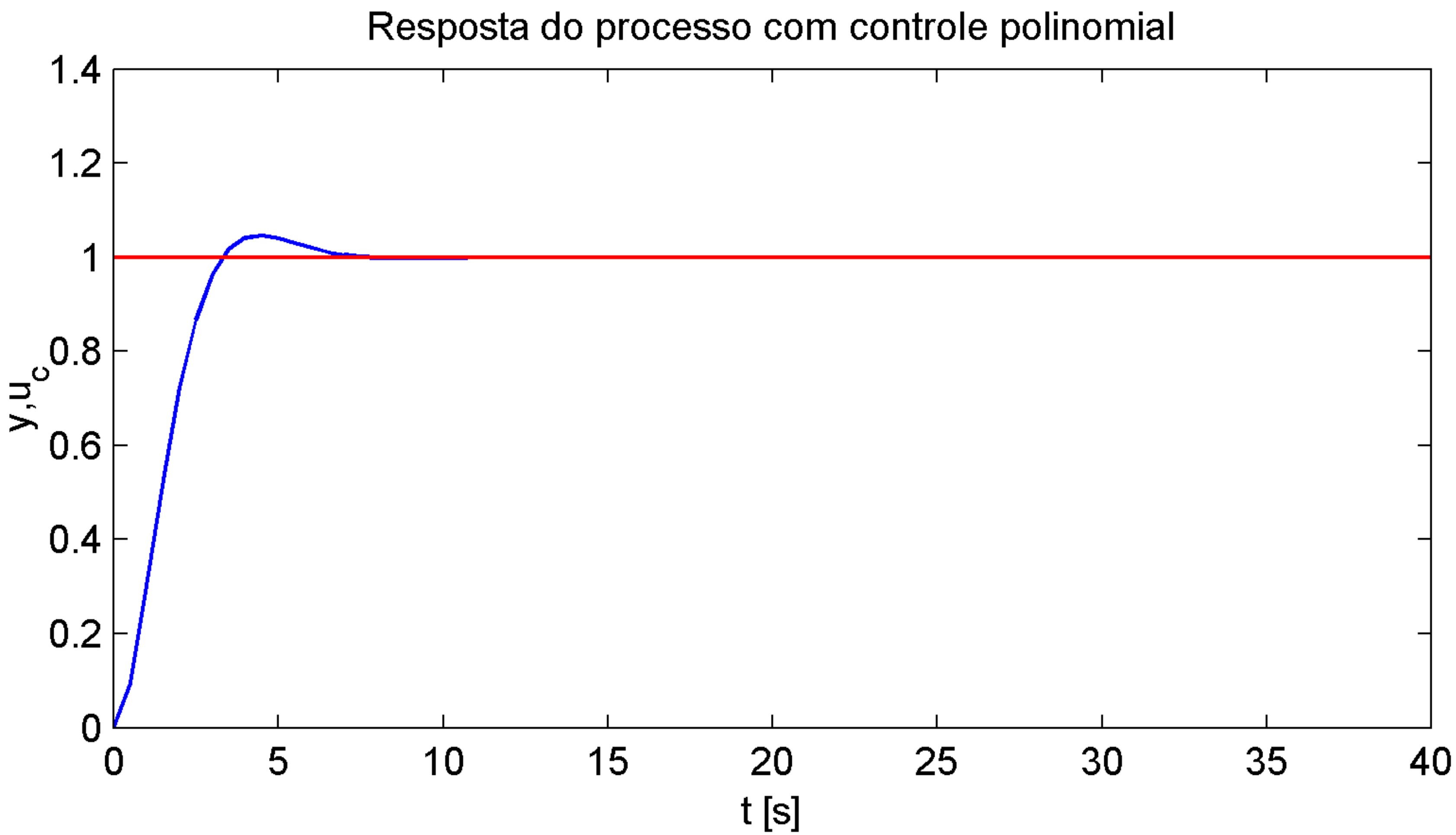
Projeto de controladores polinomiais

Resultados (1/3)



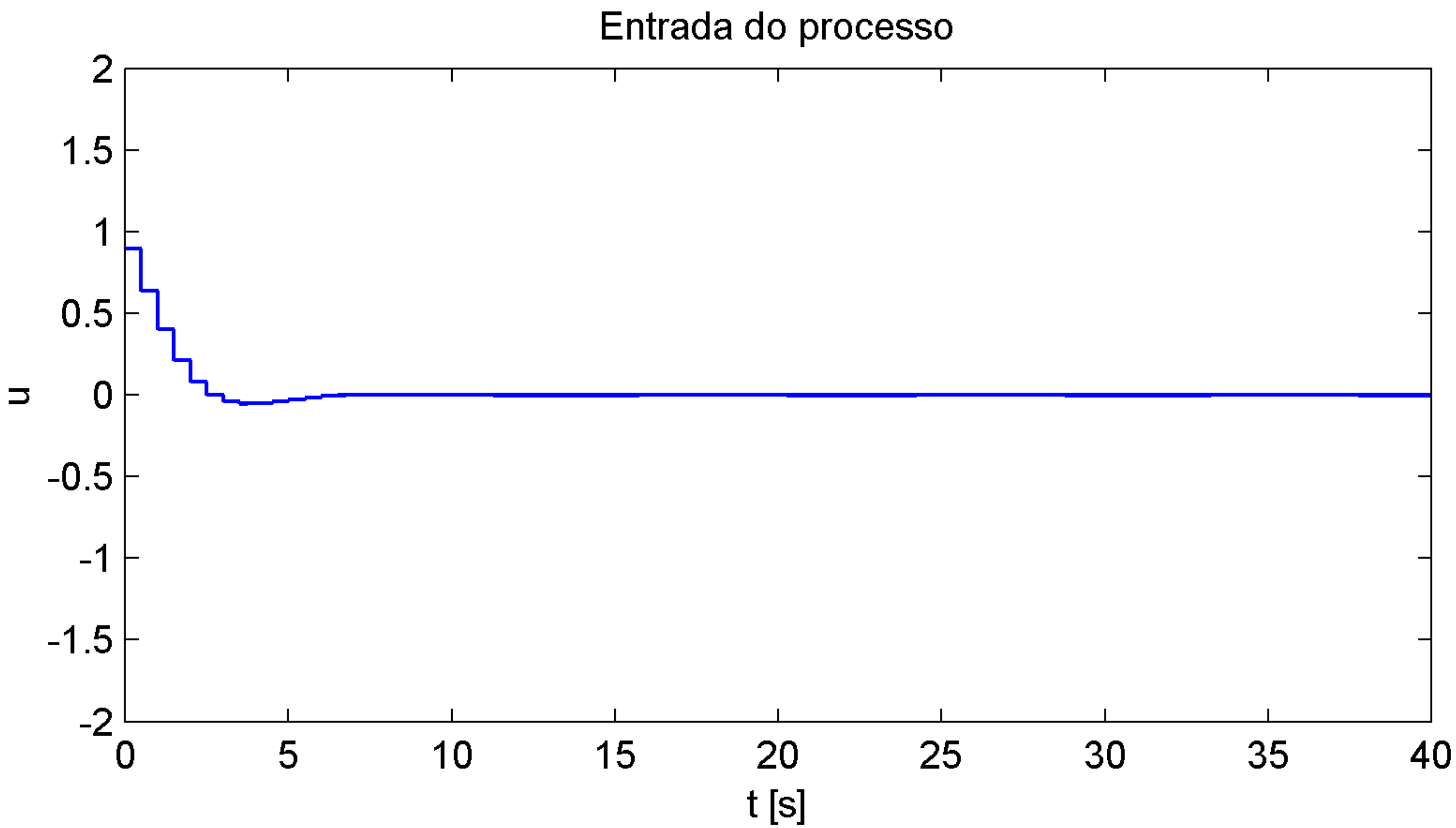
Projeto de controladores polinomiais

Resultados (2/3)



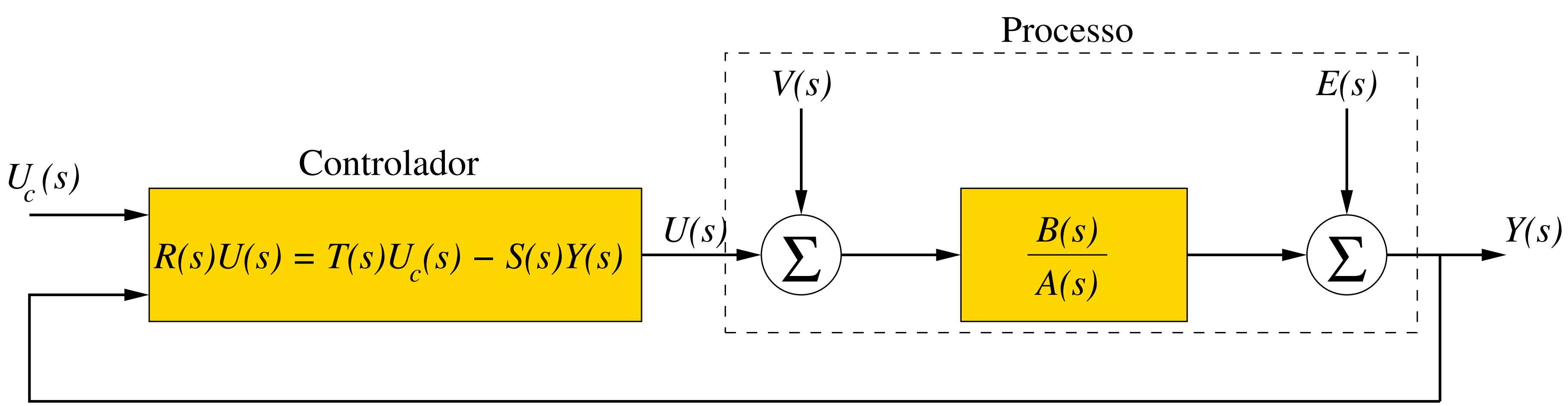
Projeto de controladores polinomiais

Resultados (3/3) - Entrada mais suave com pólo $z = 0,1111052$ ($s = -4,39$).



Controle polinomial contínuo

■ Malha de controle (processo SISO)

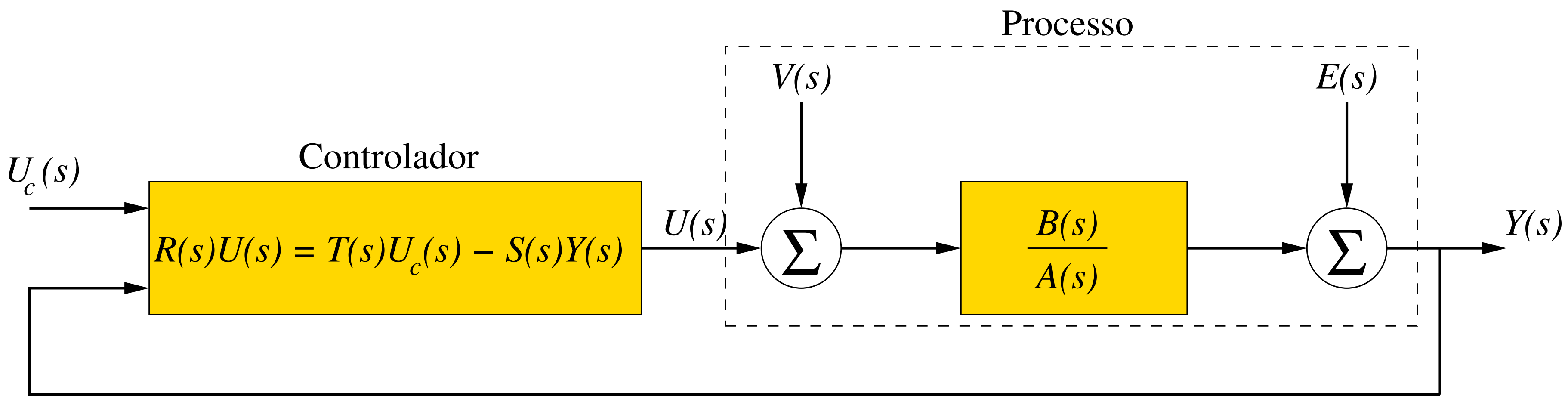


- Malha aberta

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}. \tag{47}$$

Controle polinomial contínuo

- Malha de controle (processo SISO)



- Lei de controle

$$U(s) = \frac{T(s)}{R(s)}U_c(s) - \frac{S(s)}{R(s)}Y(s). \tag{48}$$

$$H_{ff}(s) = \frac{T(s)}{R(s)} \qquad H_{fb}(s) = \frac{S(s)}{R(s)} \tag{49}$$

Aspectos práticos

- Desempenho desejado de rastreamento
- Sensibilidade a perturbações
- Influência do polinômio $A_o(z)$

Aspectos práticos

Exemplo 4. *Exemplo 10.5 do livro texto revisitado: capacidade do controle de motor CC em rastrear uma trajetória trapezoidal*

Modelo de referência:

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{z(1+p_1+p_2)}{z^2+p_1 z+p_2}. \tag{50}$$

Erro de rastreamento:

$$E_r(z) = U_c(z) - Y(z) = [1 - H_m(z)]\, U_c(z). \tag{51}$$

Erro de regime na resposta ao degrau: $U_c(z) = z(z-1)^{-1}$

$$\lim_{k\to\infty} e_r(k) = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)}{z} E_r(z) = [1 - H_m(1)] = 0. \tag{52}$$

Aspectos práticos

Exemplo 4. *Exemplo 10.5 do livro texto revisitado: capacidade do controle de motor CC em rastrear uma trajetória trapezoidal*

Modelo de referência:

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{z(1+p_1+p_2)}{z^2+p_1 z+p_2}. \tag{53}$$

Erro de rastreamento:

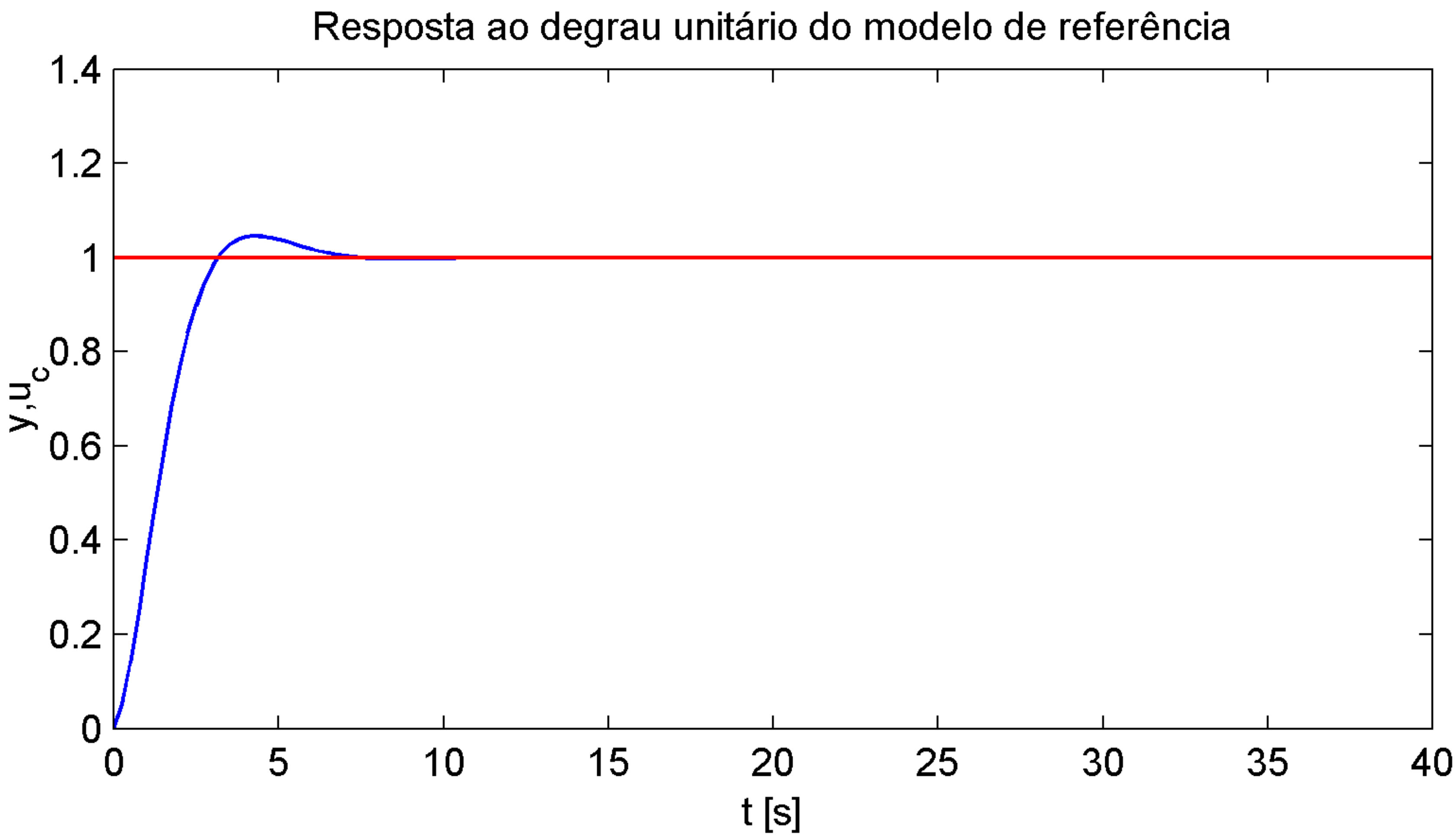
$$E_r(z) = U_c(z) - Y(z) = [1 - H_m(z)]\, U_c(z). \tag{54}$$

Erro de regime na resposta à rampa: $U_c(z) = z(z-1)^{-2}$

$$\lim_{k\to\infty} e_r(k) = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)}{z} E_r(z) \neq 0. \tag{55}$$

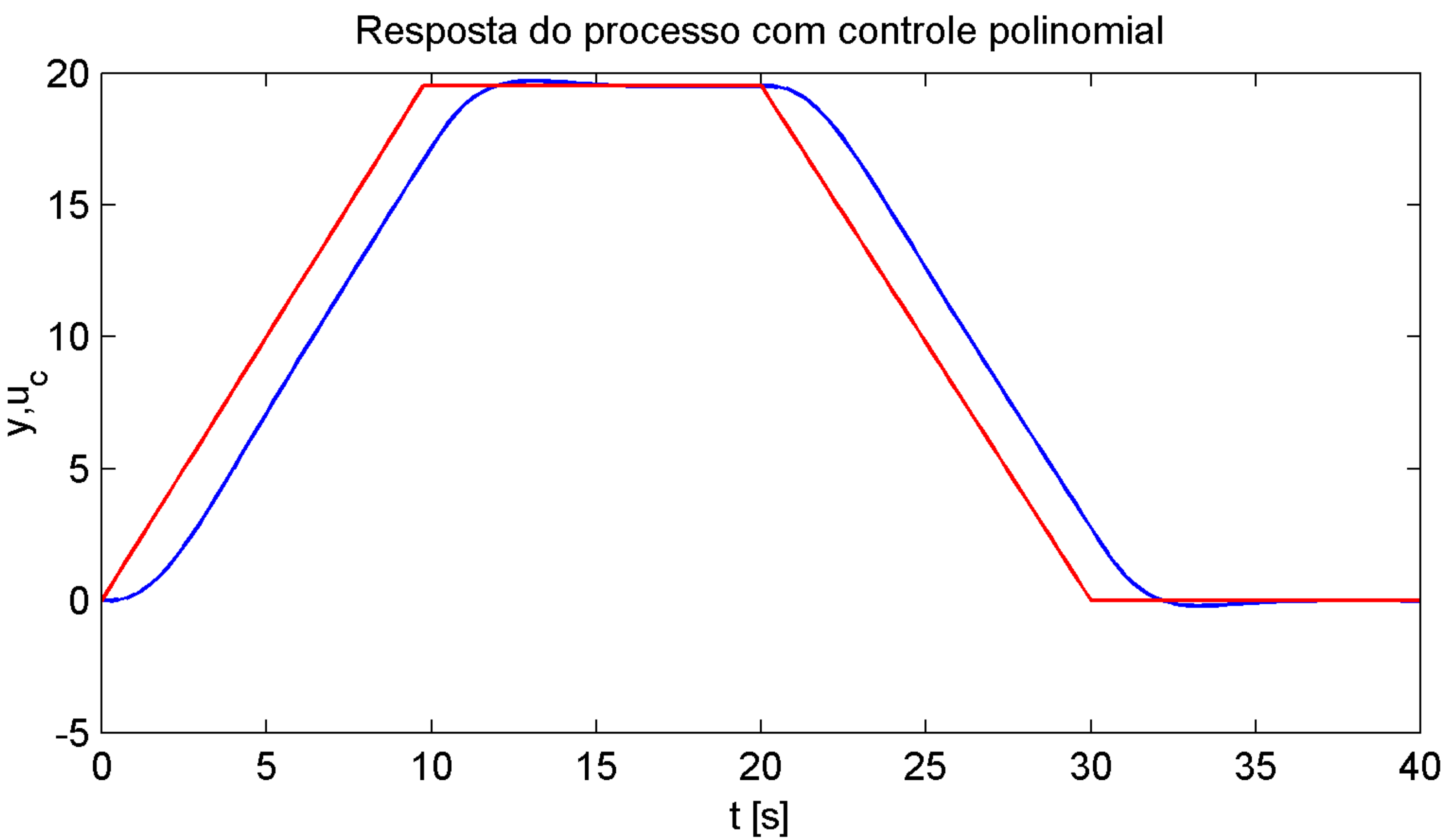
Aspectos práticos

Resultados (1/3)



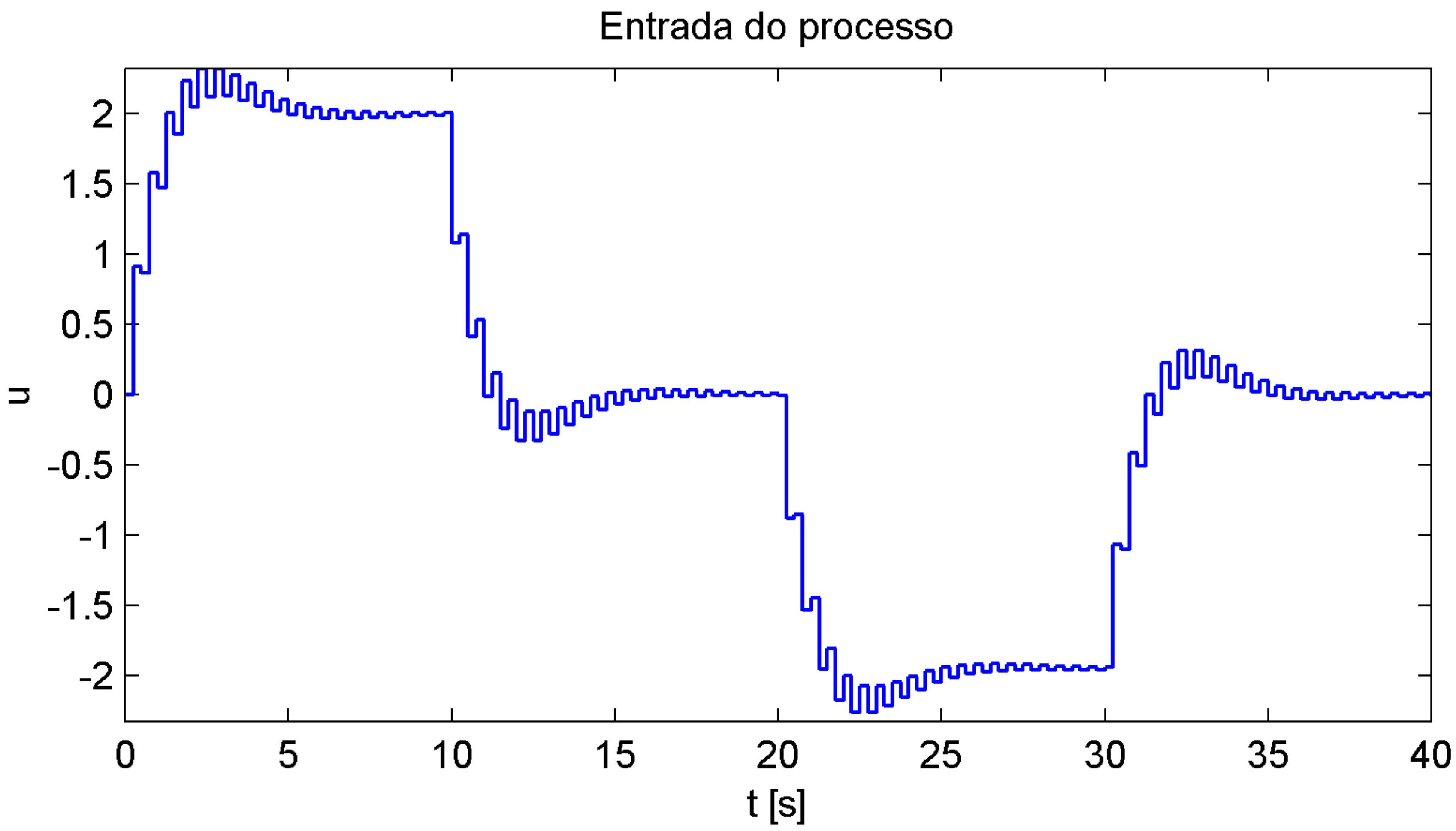
Aspectos práticos

Resultados (2/3) - Erro de rastreamento dos segmentos rampa de u_c



Aspectos práticos

Resultados (3/3)



Aspectos práticos

- Desempenho desejado de rastreamento
  - Equação característica: primeira ordem

$$P_1(z) = z - a \tag{56}$$

$$a = \exp(-T/\tau) \tag{57}$$

com τ sendo a constante de tempo desejada.

  - Equação característica: segunda ordem

$$P_1(z) = z^2 + p_1 z + p_2 \tag{58}$$

$$p_1 = -2e^{\zeta\omega_n T}\cos(\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}) \tag{59}$$

$$p_2 = e^{-2\zeta\omega_n T} \tag{60}$$

Aspectos práticos

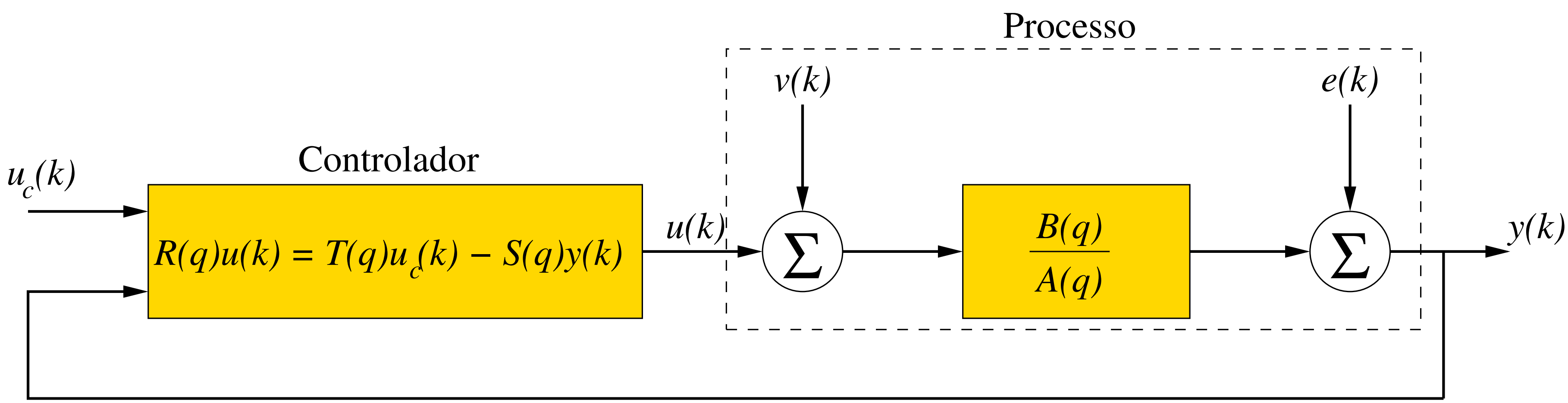
- Desempenho desejado de rastreamento
  - Atraso de d períodos de amostragem: $D_1(z) = z^d$
  - Dinâmica rápida (não dominante): $P_2(z)$
  - Modelo de referência composto:

$$H_m(z) = \frac{P(1)}{B^-(1)} \cdot \frac{B^-(z)}{z^d P(z)} \tag{61}$$

com $P(z) = P_1(z)P_2(z)$.

Aspectos práticos

- Sensibilidade a perturbações

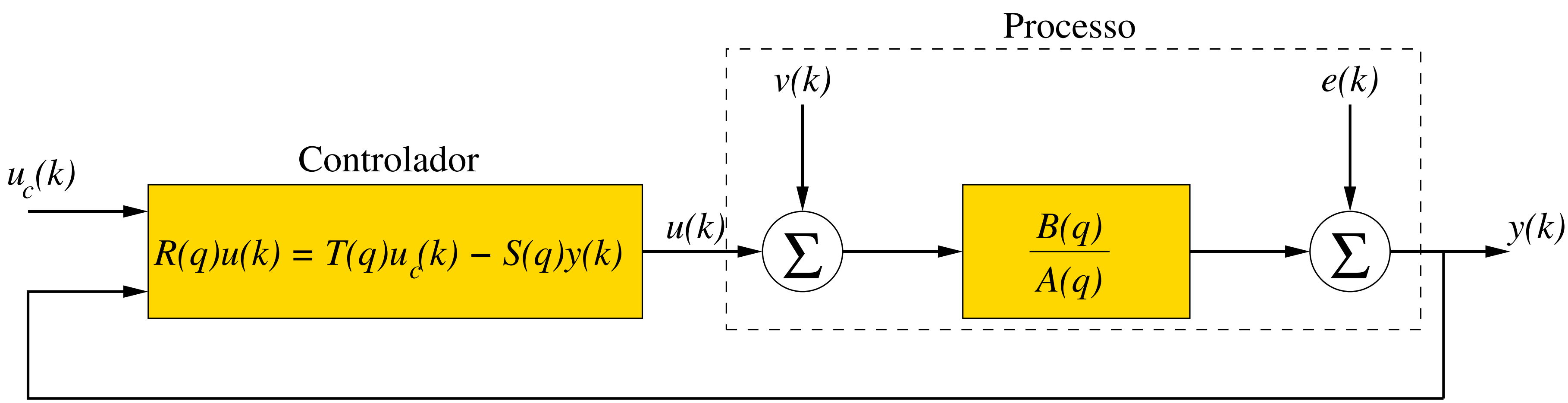


- Perturbações:

$$y = \frac{BT}{AR+BS}u_c + \frac{BR}{AR+BS}v + \frac{AR}{AR+BS}e \tag{62}$$

Aspectos práticos

- Sensibilidade a perturbações



- Compensação de perturbações: degrau ($l = 1$), rampa ($l = 2$),...

$$R(q) = B^{+}(q)(q-1)^{l}R_1'(q) \tag{63}$$

Aspectos práticos

Exemplo 5. *Exemplo 10.5 do livro texto revisitado: capacidade do controle de motor CC em compensar perturbações do tipo degrau*

Modelo do motor:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)} \tag{64}$$

Modelo de referência:

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{z(1+p_1+p_2)}{z^2+p_1 z+p_2}. \tag{65}$$

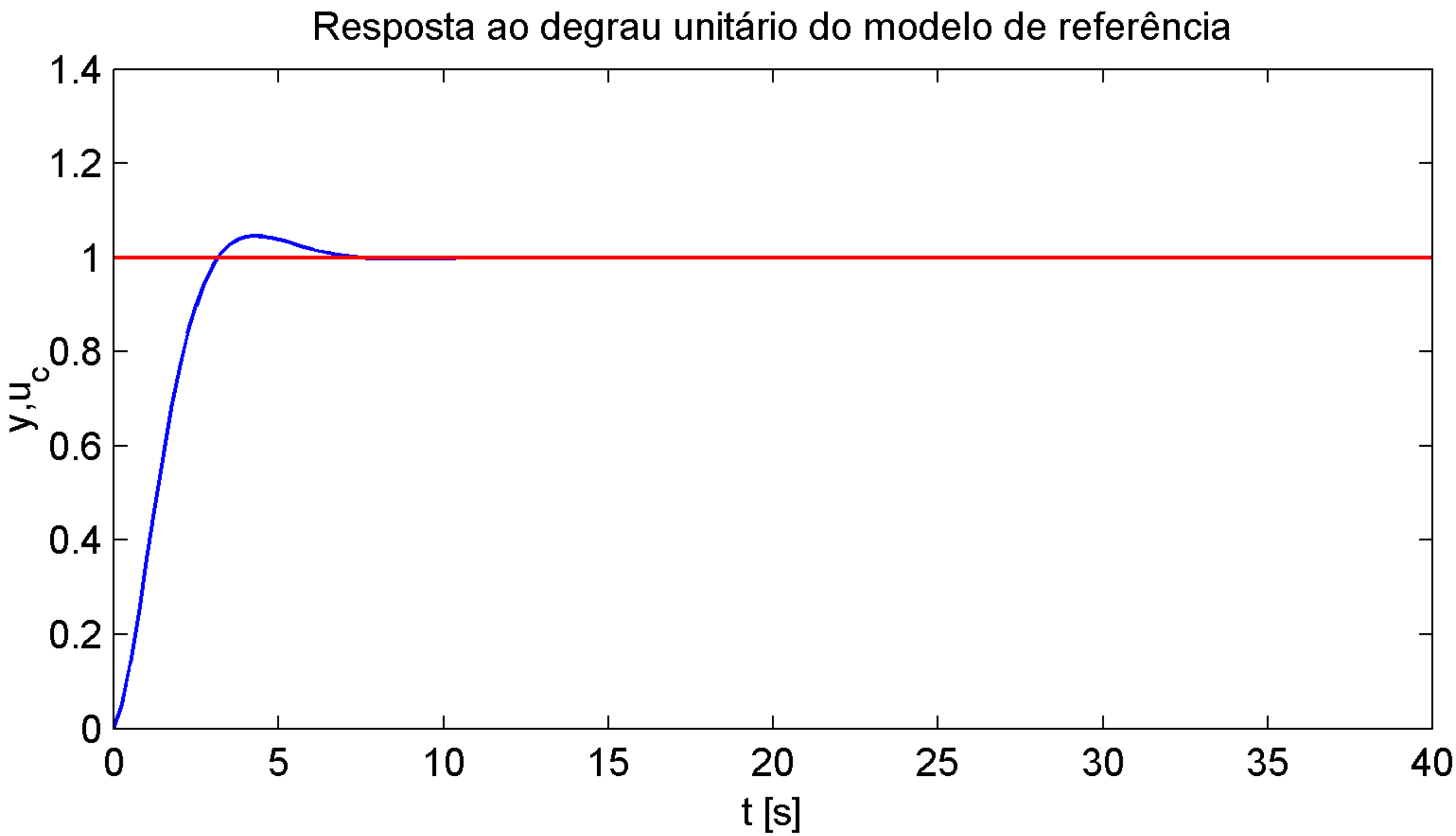
Polinômio $R(q)$:

$$R(q) = z - b \tag{66}$$

com $b \approx -0,92$.

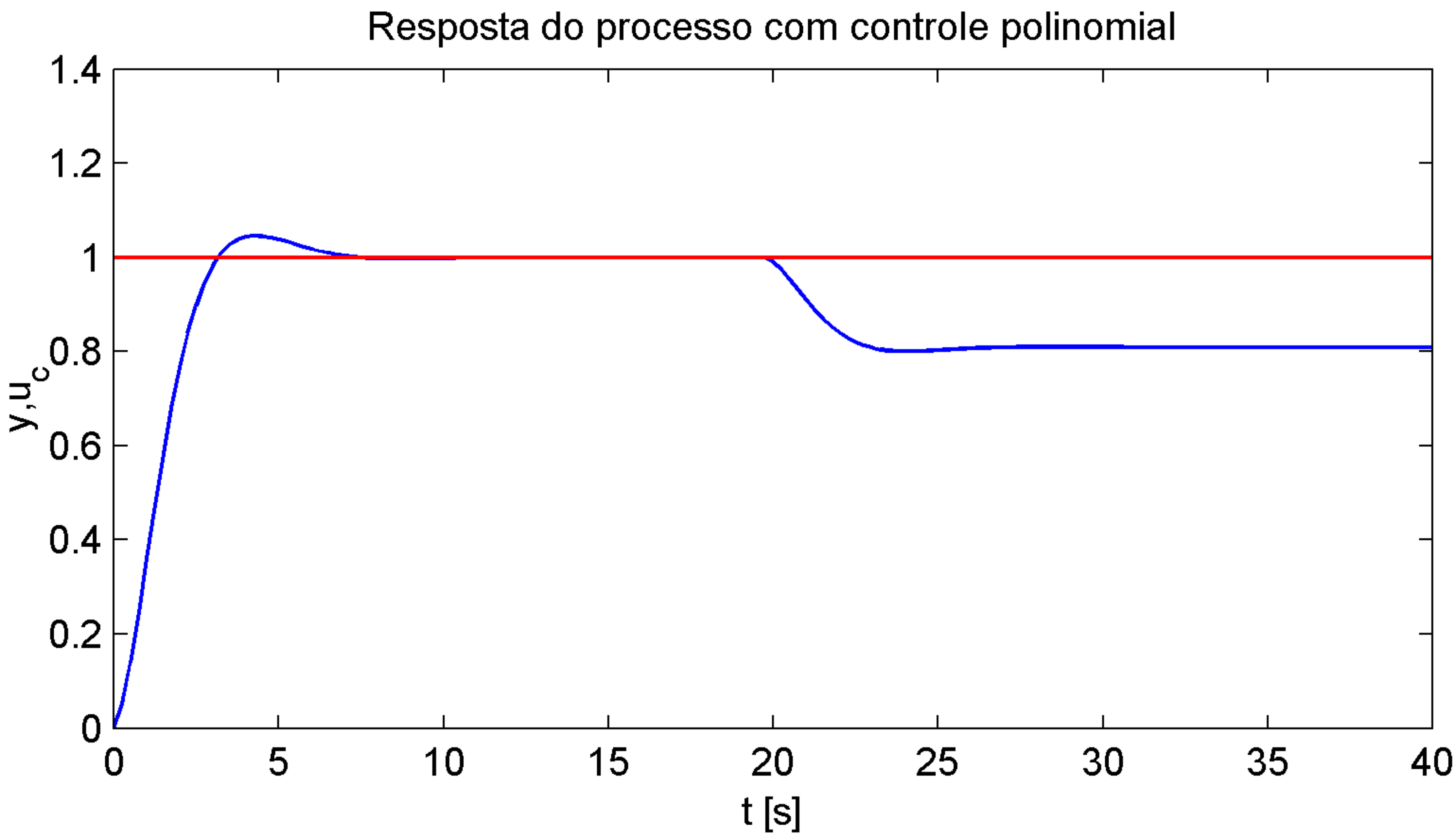
Aspectos práticos

Resultados (1/3)



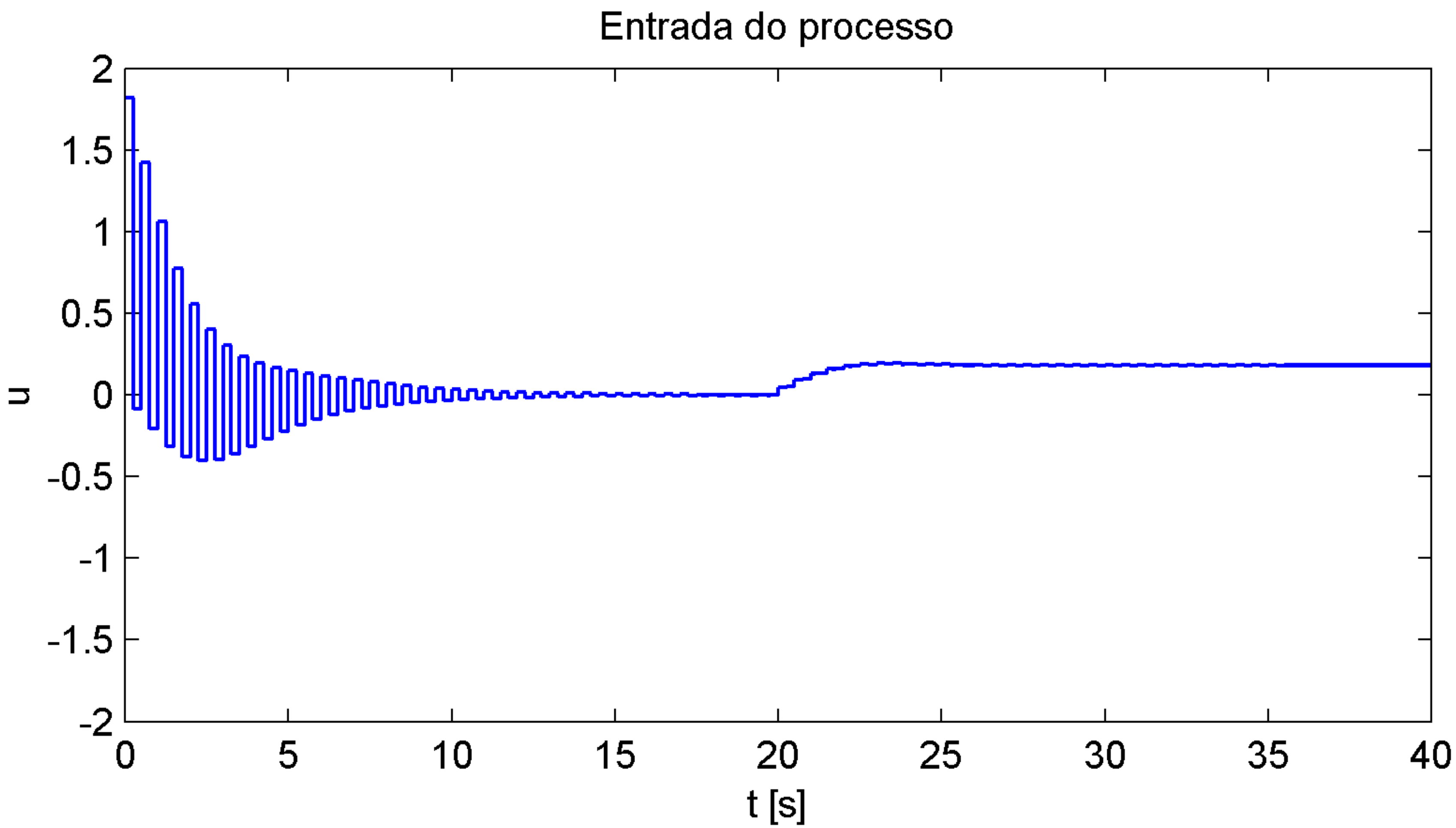
Aspectos práticos

Resultados (2/3) - Erro de correção de $e(k) = -0,05$ para $kT > 20s$.



Aspectos práticos

Resultados (3/3)



Aspectos práticos

Exercício 1. *Refazer o projeto do controlador polinomial para motor CC com cancelamento do zero e compensação de perturbações do tipo degrau.*

São dados:

I. Polinômios dos modelos:

$$\frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{z(1+p_1+p_2)}{z^2+p_1z+p_2} \qquad \text{e} \qquad \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)}$$

II. Correção de perturbações do tipo degrau: $l = 1$

$$R(q) = B^+(q)(q-1)^l R_1'(q). \tag{67}$$

III. Parâmetros de $A_o(q)$

Aspectos práticos

Solução:

I. Polinômios dos modelos: $B^{+}(z) = (z-b)$, $B^{-}(z) = K$, $B'_m(z) = z(1+p_1+p_2)/K$

II. Polinômio do observador:

$$A_o(z) = z + a_1 \tag{68}$$

III. Polinômios do controlador:

$$R(q) = q^2 - (b+1)q + b \qquad S(q) = s_0 q^2 + s_1 q + s_2 \qquad T(q) = q^2 t_0 + q t_1 \tag{69}$$

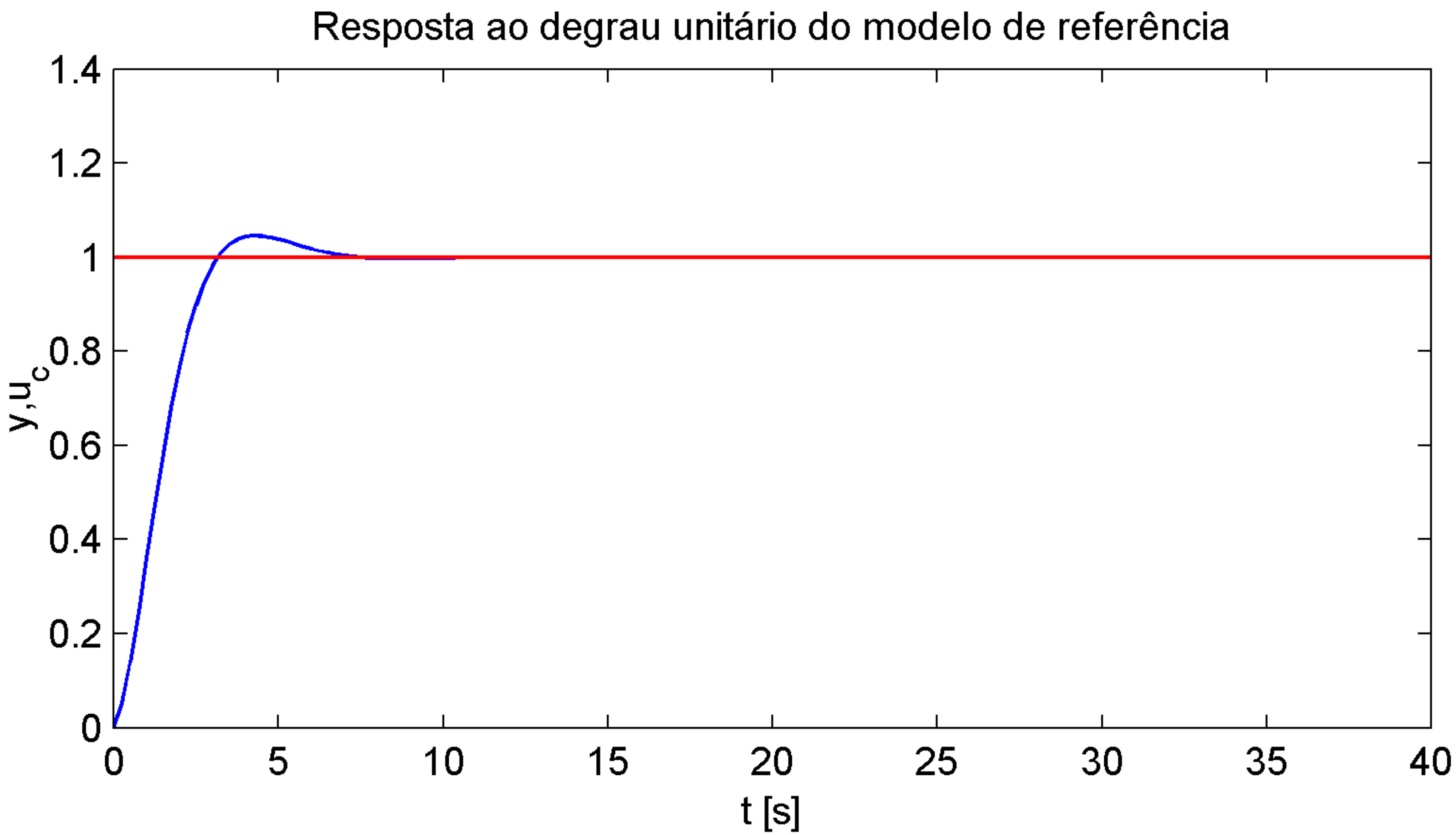
com

$$s_0 = \frac{a_1 + p_1 + (a+2)}{K}, \quad s_1 = \frac{p_2 + a_1 p_1 - (1+2a)}{K}, \quad s_2 = \frac{a_1 p_2 + a}{K} \tag{70}$$

$$t_0 = \frac{1+p_1+p_2}{K}, \quad t_1 = \frac{1+p_1+p_2}{K} a_1 \tag{71}$$

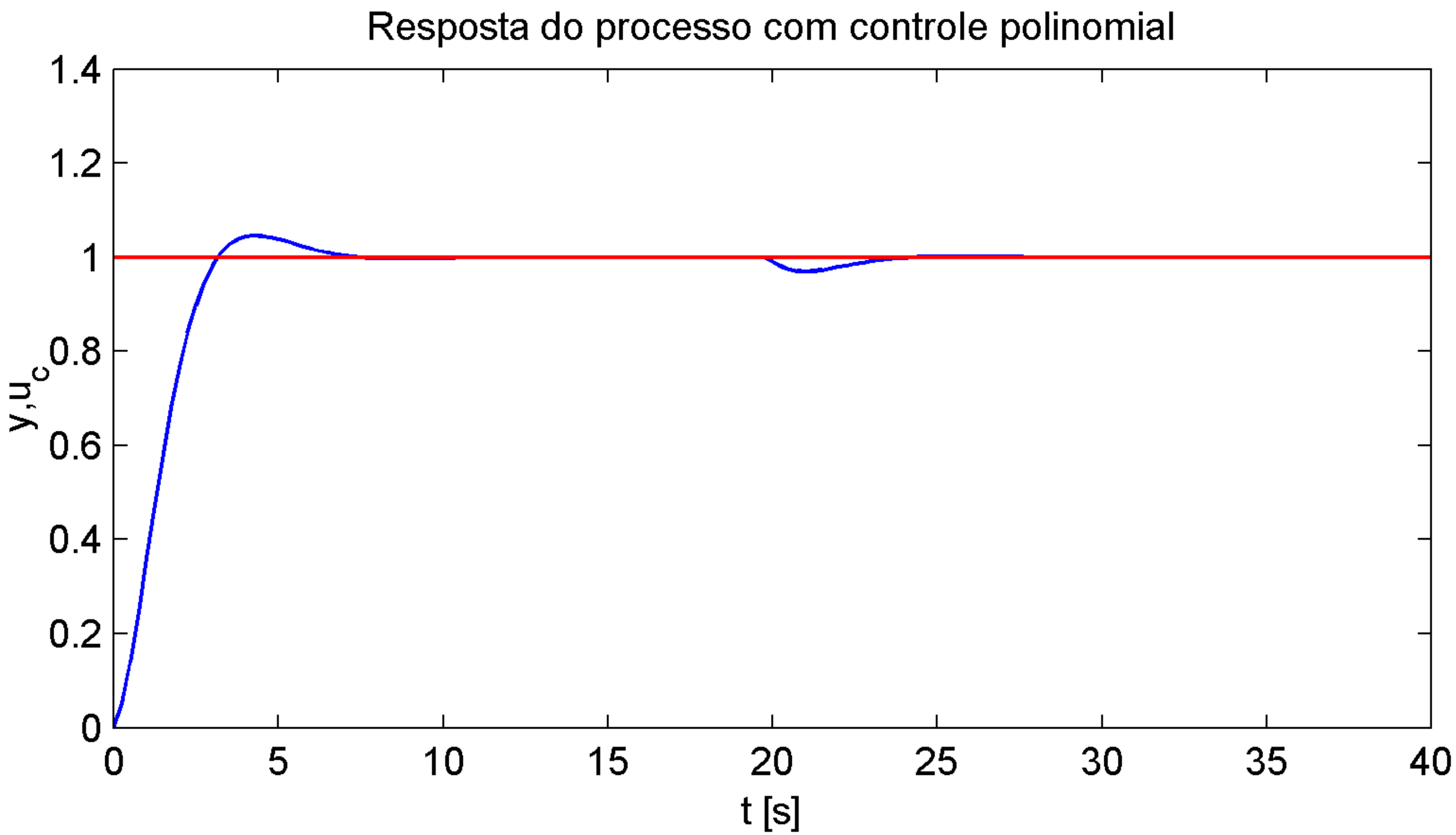
Aspectos práticos

Resultados (1/3)



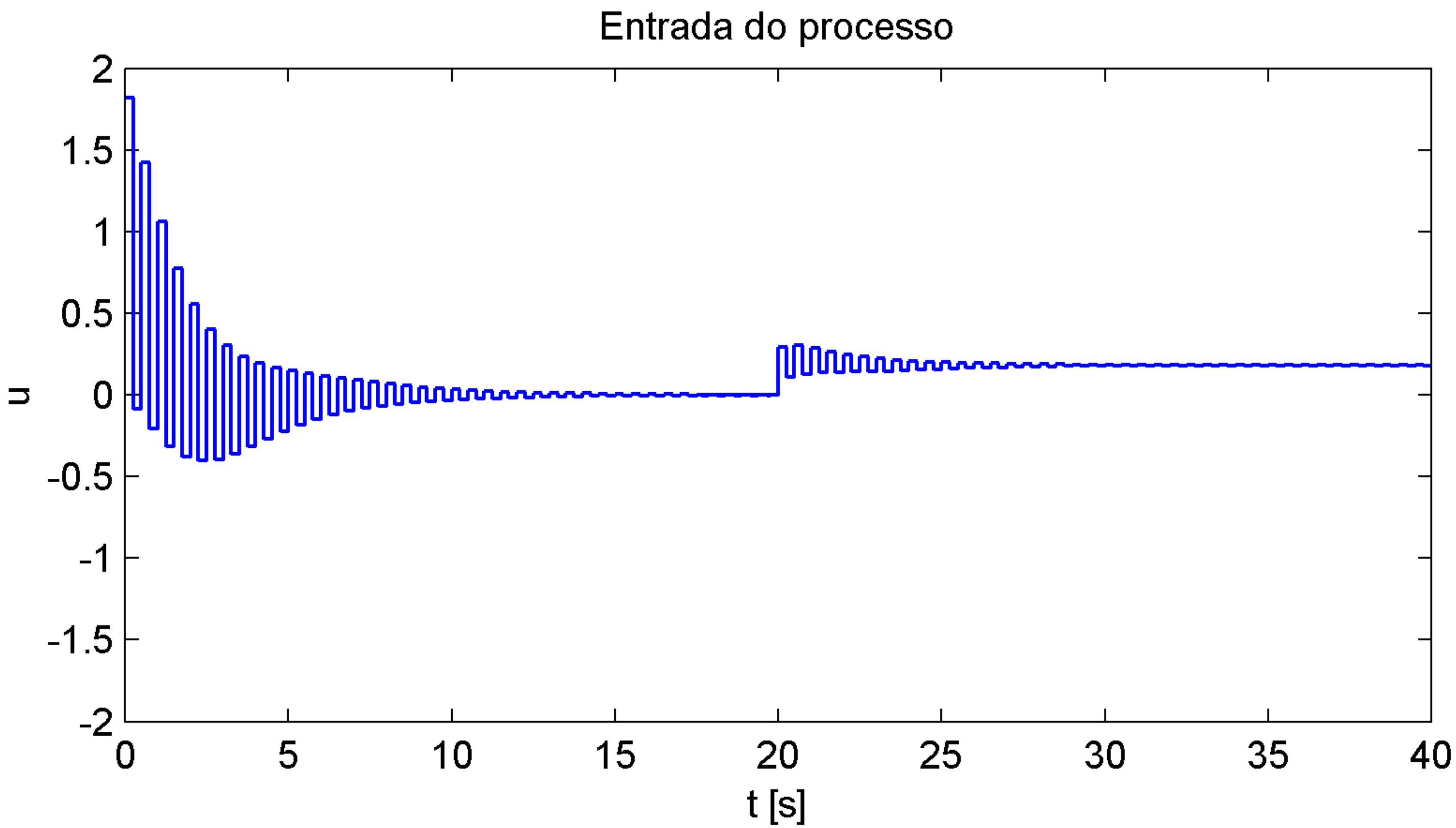
Aspectos práticos

Resultados (2/3) - Correção de $e(k) = -0,05$ para $kT > 20s$ ($a_1 = e^{-5T}$)



Aspectos práticos

Resultados (3/3)

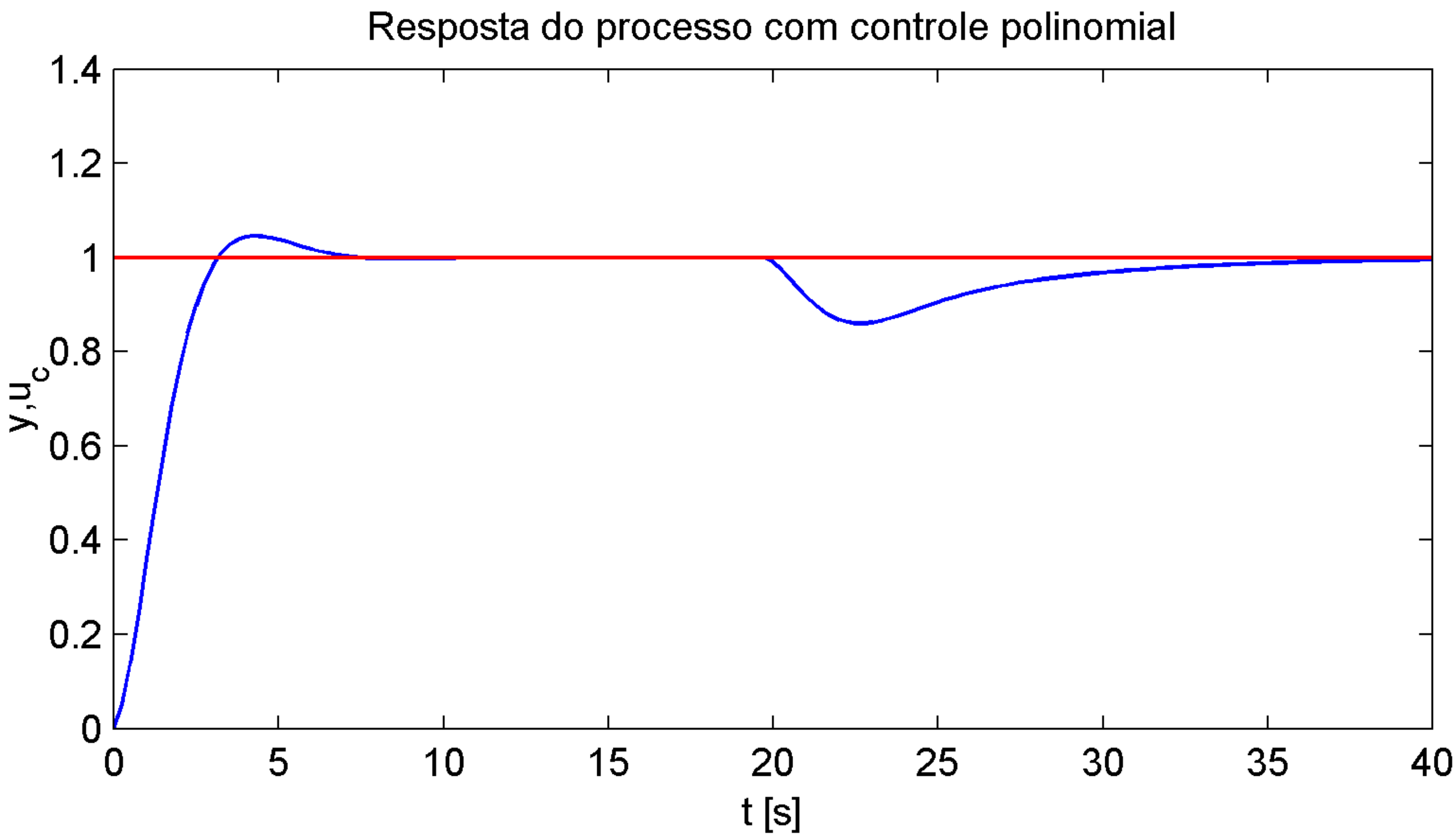


Aspectos práticos

- Influência do polinômio $A_o(z)$
  - Aumento do grau de R, S e T;
  - Se composto de raízes rápidas, pouco influencia o comportamento;
  - Se composto de raízes lentas, influencia a correção de perturbações;
  - Deve ser considerado na determinação do período de amostragem T.

Aspectos práticos

Curva do exercício 1 - Correção de $e(k) = -0,05$ para $kT > 20s$ ($a_1 = e^{-0,2T}$)



Bibliografia