Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília

Tópicos em Controle de Processos 2

Controle ótimo

Geovany A. Borges
gaborges@ene.unb.br

Introdução

- Modelos de processo
  - Modelo em espaço de estados (contínuo)

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\cdot dt + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)\cdot dt + d\mathbf{v}_c(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (2)$$

  - Modelo em espaço de estados (discreto)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (3)$$

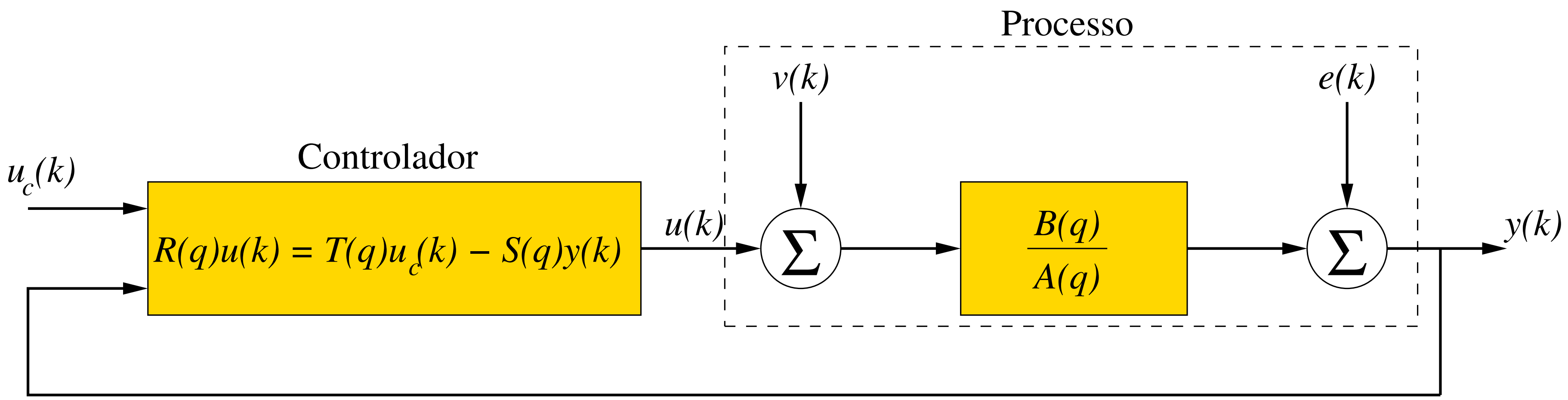
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k) \quad (4)$$

com $\mathbf{v}(k)$ e $\mathbf{e}(k)$ sendo processos Gaussianos com média nula e

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\} &= \mathbf{R}_{\mathbf{v}}(k), \quad E\{\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)\} = \mathbf{R}_{\mathbf{e}}(k), \quad E\{\mathbf{e}(k)\mathbf{v}^T(k)\} = \mathbf{R}_{\mathbf{ev}}(k) \\ E\{\mathbf{x}(0)\} &= \mathbf{x}_0, \quad E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^T(0)\} = \mathbf{R}_{\mathbf{x}_0}, \end{aligned}$$

Introdução

- Objetivos de controle
  - Abordagem controle polinomial: Alocação dos pólos e zeros (SISO)



Introdução

- Objetivos de controle
  - Abordagem controle ótimo: Critério de custo (MIMO, variante no tempo)
  - Critério (contínuo)

$$\begin{aligned} J &= E\{\int_0^{NT}[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_{1c}\mathbf{x}(t)+2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_{12c}\mathbf{u}(t)+\mathbf{u}^T(t)\mathbf{Q}_{2c}\mathbf{u}(t)]dt \\ &\quad +\mathbf{x}^T(NT)\mathbf{Q}_{0c}\mathbf{x}(NT)\} \end{aligned} \tag{5}$$

com $\mathbf{Q}_{0c}$, $\mathbf{Q}_{1c}$ e $\mathbf{Q}_{2c}$ sendo matrizes simétricas e definidas positivas. $\mathbf{Q}_{12c}$ não precisa das mesmas exigências.

Introdução

- Objetivos de controle
  - Critério (discreto)

$$
\begin{aligned}
J &= E\{\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}(k)+2\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_{12}\mathbf{u}(k)+\mathbf{u}^T(k)\mathbf{Q}_2\mathbf{u}(k)] \\
&\quad +\mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}_0\mathbf{x}(N)\} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

com

$$
\mathbf{Q}_1 = \int_{kT}^{(k+1)T} \mathbf{F}^T\mathbf{Q}_{1c}\mathbf{F}\, ds \qquad (7)
$$

$$
\mathbf{Q}_{12} = \int_{kT}^{(k+1)T} \mathbf{F}^T\left[\mathbf{Q}_{1c}\mathbf{G}+\mathbf{Q}_{12c}\right]\, ds \qquad (8)
$$

$$
\mathbf{Q}_2 = \int_{kT}^{(k+1)T} \left[\mathbf{G}^T\mathbf{Q}_{1c}\mathbf{G}+2\mathbf{G}^T\mathbf{Q}_{12c}+\mathbf{Q}_{2c}\right]\, ds \qquad (9)
$$

Introdução

- Simplificação do critério

  Usando $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{M}^T\mathbf{x}$, com $\mathbf{M} = \mathbf{Q}_{12}Q_2^{-1}$, o sistema discreto se torna

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \tilde{\mathbf{F}}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)\tilde{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{v}(k) \qquad (10)\\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

  com $\tilde{\mathbf{F}}(k) = \mathbf{F}(k) - \mathbf{G}(k)\mathbf{M}^T$.

  O critério se transforma em

$$
J = E\{\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^T(k)\tilde{\mathbf{Q}}_1\mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{u}}^T(k)\mathbf{Q}_2\tilde{\mathbf{u}}(k)] + \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}_0\mathbf{x}(N)\} \qquad (12)
$$

  com $\tilde{\mathbf{Q}}_1 = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_{12}\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{Q}_{12}^T$.

Controle linear quadrático

- Objetivo de controle: determinar $\mathbf{u}^*(k)$ tal que

$$\mathbf{u}^*(k) = \arg\min_{\mathbf{u}(k)} J$$

sendo $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{L}(k)\mathbf{x}(k)$.

- Critério modificado (caso determinístico)

$$\begin{aligned} J' &= E\{\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^T(k)\tilde{\mathbf{Q}}_1\mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{u}}^T(k)\mathbf{Q}_2\tilde{\mathbf{u}}(k)] + \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}_0\mathbf{x}(N) \\ &\quad + \lambda^T(k+1)[-\mathbf{x}(k+1) + \tilde{\mathbf{F}}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)\tilde{\mathbf{u}}(k)]\} \end{aligned} \tag{13}$$

com λ sendo multiplicadores de Lagrange.

Controle linear quadrático

- Condições de ótimalidade

  Sendo J' uma função quadrática positiva, o mínimo se caracteriza por

$$\frac{\partial J'}{\partial \mathbf{x}(k)} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial J'}{\partial \tilde{\mathbf{u}}(k)} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial J'}{\partial \lambda(k+1)} = \mathbf{0}.$$

$$\frac{\partial J'}{\partial \mathbf{x}(k)} = \mathbf{x}^T(k)\tilde{\mathbf{Q}}_1 - \lambda^T(k) + \lambda^T(k+1)\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \text{ (se } k \neq N) \tag{14}$$

$$= \mathbf{x}^T(N)\tilde{\mathbf{Q}}_0 - \lambda^T(N) = \mathbf{0} \text{ (se } k = N) \tag{15}$$

$$\frac{\partial J'}{\partial \lambda(k+1)} = -\mathbf{x}(k+1) + \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{0} \tag{16}$$

$$\frac{\partial J'}{\partial \tilde{\mathbf{u}}(k)} = \tilde{\mathbf{u}}^T(k)\mathbf{Q}_2 + \lambda^T(k+1)\mathbf{G} = \mathbf{0} \tag{17}$$

Controle linear quadrático

- Derivação da lei de controle

  Da eq. (14) tem-se

$$\lambda(k) = \tilde{\mathbf{Q}}_1 \mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{F}}^T \lambda(k+1) \tag{18}$$

  bem como de (15) estabelece-se a condição final de λ:

$$\lambda(N) = \tilde{\mathbf{Q}}_0 \mathbf{x}(N) \tag{19}$$

  implicando que $\lambda(k+1) = 0$ para $k \geq N$, ou seja, o controle não se interessa pelo que ocorre depois do horizonte de tempo.

  Da equação (17), obtem-se

$$\tilde{\mathbf{u}}^T(k) = -\lambda^T(k+1)\mathbf{G}\mathbf{Q}_2^{-1}$$

  ou ainda

$$\tilde{\mathbf{u}}(k) = -\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{G}^T\lambda(k+1) \tag{20}$$

Controle linear quadrático

- Derivação da lei de controle

  Da equação (18), extrai-se

$$\lambda(k+1) = \tilde{\mathbf{F}}^{-T}\lambda(k) - \tilde{\mathbf{F}}^{-T}\tilde{\mathbf{Q}}_1\mathbf{x}(k) \tag{21}$$

  Para este problema, dispõe-se de $\mathbf{x}(0)$ e $\tilde{\mathbf{u}}(0)$, mas nada se sabe de $\lambda(0)$, estando apenas a condição final definida por (19). Este é conhecido como problema de dois valores, que pode ser simplificado se for definida uma matriz $\mathbf{S}(k)$ tal que

$$\lambda(k) = \mathbf{S}(k)\mathbf{x}(k). \tag{22}$$

  Aplicando esta relação na eq. (20), resulta em

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_2\tilde{\mathbf{u}}(k) &= -\mathbf{G}^T\lambda(k+1) \\
&= -\mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \\
&= -\mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\{\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k)+\mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}}(k)\}
\end{aligned}$$

Controle linear quadrático

- Derivação da lei de controle

  Reorganizando os termos desta equação resulta em

$$\tilde{\mathbf{u}}(k) = \{\mathbf{Q}_2 + \mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\mathbf{G}\}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k)$$

  que é uma lei de controle da forma

$$\tilde{\mathbf{u}}(k) = -\mathbf{L}(k)\mathbf{x}(k) \tag{23}$$

  com

$$\mathbf{L}(k) = \{\mathbf{Q}_2 + \mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\mathbf{G}\}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\tilde{\mathbf{F}} \tag{24}$$

  Portanto, para se calcular a lei de controle (23), é preciso determinar $\mathbf{S}(k+1)$. Aplicando $\lambda(k) = \mathbf{S}(k)\mathbf{x}(k)$ à eq. (18),

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(k)\mathbf{x}(k) &= \tilde{\mathbf{F}}^T\mathbf{S}(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \tilde{\mathbf{Q}}_1\mathbf{x}(k) && (25) \\ &= \tilde{\mathbf{F}}^T\mathbf{S}(k+1)\{\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}}(k)\} + \tilde{\mathbf{Q}}_1\mathbf{x}(k) && (26) \end{aligned}$$

Controle linear quadrático

- Derivação da lei de controle

Como $\tilde{\mathbf{u}}(k) = -\mathbf{L}(k)\mathbf{x}(k)$,

$$\mathbf{S}(k)\mathbf{x}(k) = \tilde{\mathbf{F}}^T\mathbf{S}(k+1)\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}(\mathbf{k}+\mathbf{1})\mathbf{G}\mathbf{L}(k)\mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{Q}}_1\mathbf{x}(k) \tag{27}$$

que se escreve como

$$\left\{\mathbf{S}(k) - \tilde{\mathbf{F}}^T\mathbf{S}(k+1)\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}(\mathbf{k}+\mathbf{1})\mathbf{G}\mathbf{L}(k) - \tilde{\mathbf{Q}}_1\right\}\mathbf{x}(k) = \mathbf{0} \tag{28}$$

Como $\mathbf{x}(k)$ não pode ser identicamente $\mathbf{0}$ para todo k, então faz-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(k) &= \tilde{\mathbf{F}}^T\mathbf{S}(k+1)\tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}(\mathbf{k}+\mathbf{1})\mathbf{G}\mathbf{L}(k) + \tilde{\mathbf{Q}}_1 \\
&= [\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G}\mathbf{L}(k)]^T\mathbf{S}(k+1)[\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G}\mathbf{L}(k)] \\
&\quad + \mathbf{L}^T(k)\mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{L}^T(k)\mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\mathbf{G}\mathbf{L}(k) + \tilde{\mathbf{Q}}_1
\end{aligned} \tag{29}$$

Controle linear quadrático

- Derivação da lei de controle

  Da equação (24) obtem-se

$$\mathbf{Q}_2\mathbf{L}(k) = \mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\mathbf{G}\mathbf{L}(k)$$

  Assim

$$\mathbf{S}(k) = [\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G}\mathbf{L}(k)]^T\mathbf{S}(k+1)[\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G}\mathbf{L}(k)] + \tilde{\mathbf{Q}}_1 + \mathbf{L}^T(k)\mathbf{Q}_2\mathbf{L}(k) \tag{30}$$

  que é a famosa equação de Riccati no tempo discreto (ERTD). Sabendo que $\lambda(N) = \tilde{\mathbf{Q}}_0\mathbf{x}(N)$ e $\lambda(k) = \mathbf{S}(k)\mathbf{x}(k)$, tem-se assim a condição final para $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S}(N) = \tilde{\mathbf{Q}}_0. \tag{31}$$

  Desta forma, o problema que antes era de dois valores terminais foi simplificado para apenas um valor terminal em $\mathbf{S}$.

Controle linear quadrático

- Valor mínimo do critério (sem incertezas)

  O mínimo valor da função de custo é obtido pela aplicação das equações (14)-(17) a J':

$$\begin{aligned}\min J' &= \sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^T(k)\tilde{\mathbf{Q}}_1\mathbf{x}(k)+\tilde{\mathbf{u}}^T(k)\mathbf{Q}_2\tilde{\mathbf{u}}(k)]+\mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}_0\mathbf{x}(N)\\ &\quad +\lambda^T(k+1)[-\mathbf{x}(k+1)+\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k)+\mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}}(k)] \qquad (32)\end{aligned}$$

  com

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}^T(k)\mathbf{Q}_2 &= -\lambda^T(k+1)\mathbf{G}\\ \mathbf{x}^T(k)\tilde{\mathbf{Q}}_1 &= \lambda^T(k)-\lambda^T(k+1)\tilde{\mathbf{F}}\\ \mathbf{x}(k+1) &= \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k)+\mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}}(k)\end{aligned}$$

Controle linear quadrático

- Valor mínimo do critério (sem incertezas)

  Tem-se então

$$\begin{aligned}
\min J' &= \sum_{k=0}^{N-1} [\lambda^T(k)\mathbf{x}(k) - \lambda^T(k+1)\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k) - \lambda^T(k+1)\mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}}(k)] + \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}_0\mathbf{x}(N) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} [\lambda^T(k)\mathbf{x}(k) - \lambda^T(k+1)\mathbf{x}(k+1)] + \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}_0\mathbf{x}(N) \qquad (33) \\
&= \lambda^T(0)\mathbf{x}(0) - \lambda^T(N)\mathbf{x}(N) + \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}_0\mathbf{x}(N) \qquad (34)
\end{aligned}$$

  Com a condição final (19) $\lambda(N) = \tilde{\mathbf{Q}}_0\mathbf{x}(N)$,

$$\min J' = \lambda^T(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{S}(0)\mathbf{x}(0). \qquad (35)$$

Controle linear quadrático

- Valor mínimo do critério (com incertezas)

  Considerando $\mathbf{v}(k) \neq \mathbf{0}$, e

$$
\begin{aligned}
E\{\mathbf{x}(0)\} &= \mathbf{x}_0, \quad E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^T(0)\} = \mathbf{R}_{\mathbf{x}_0}, \\
E\{\mathbf{v}(k)\} &= \mathbf{0}, \quad E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\} = \mathbf{R}_{\mathbf{v}}(k),
\end{aligned}
$$

  pode-se mostrar que a lei de controle $\tilde{\mathbf{u}}(k) = -\mathbf{L}(k)\mathbf{x}(k)$ também minimiza o critério J' e que seu mínimo (estatístico) é dado por

$$
\min J' = \mathbf{x}_0^T \mathbf{S}(0)\mathbf{x}_0 + tr(\mathbf{S}(0)\mathbf{R}_{\mathbf{x}_0}) + \sum_{k=0}^{N-1} tr(\mathbf{S}(k+1)\mathbf{R}_{\mathbf{v}}(k)) \tag{36}
$$

Controle linear quadrático

- Algoritmo de controle linear quadrático
  - Dados de entrada:
    Estado inicial $\mathbf{x}(0)$;
    Horizonte de tempo N ;
    Matrizes de ponderação $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ e $\mathbf{Q}_{12}$.

Controle linear quadrático

- Algoritmo de controle linear quadrático
  - Preparação (*offline* ou em $k = 0$)
    I. Calcular $\tilde{\mathbf{F}}(k) = \mathbf{F}(k) - \mathbf{G}(k)\mathbf{M}^T$ e $\tilde{\mathbf{Q}}_1 = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_{12}\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{Q}_{12}^T$.
    II. Iniciar $\mathbf{S}(N) = \mathbf{Q}_0$ e $\mathbf{L}(N) = \mathbf{0}$.
    III. $k = N - 1$.
    IV. Calcular

$$\mathbf{L}(k) = \{\mathbf{Q}_2 + \mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\mathbf{G}\}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{S}(k+1)\tilde{\mathbf{F}} \qquad (37)$$

$$\mathbf{S}(k) = [\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G}\mathbf{L}(k)]^T\mathbf{S}(k+1)[\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G}\mathbf{L}(k)] + \tilde{\mathbf{Q}}_1 + \mathbf{L}^T(k)\mathbf{Q}_2\mathbf{L}(k) \qquad (38)$$

    V. Armazenar $\mathbf{L}(k)$.
    VI. $k = k - 1$.
    VII. Retornar ao passo IV enquanto $k \geq 0$.

Controle linear quadrático

- Algoritmo de controle linear quadrático
  - Realização (*online*)
    No k-ésimo instante de amostragem, calcular a lei de controle como

$$\mathbf{u}(k) = \tilde{\mathbf{u}}(k) - \mathbf{Q}_2^{-T}\mathbf{Q}_{12}^T\mathbf{x}(k) \tag{39}$$

com $\tilde{\mathbf{u}}(k) = -\mathbf{L}(k)\mathbf{x}(k)$.

Controle linear quadrático

Exemplo 1. *Controle LQ de motor de corrente contínua acionado por corrente*

O modelo do motor é dado por

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} e^{-h} & 0 \\ 1-e^{-h} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1-e^{-h} \\ h-1+e^{-h} \end{pmatrix} \mathbf{u}(k) \tag{40}$$

com h sendo o período de amostragem, e $\mathbf{x} = (\omega, \theta)^T$ com ω sendo a velocidade angular do eixo e θ é o ângulo.

Escolheu-se minimizar o critério

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{Q}_2\mathbf{u}(k)] + \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}_0\mathbf{x}(N) \tag{41}$$

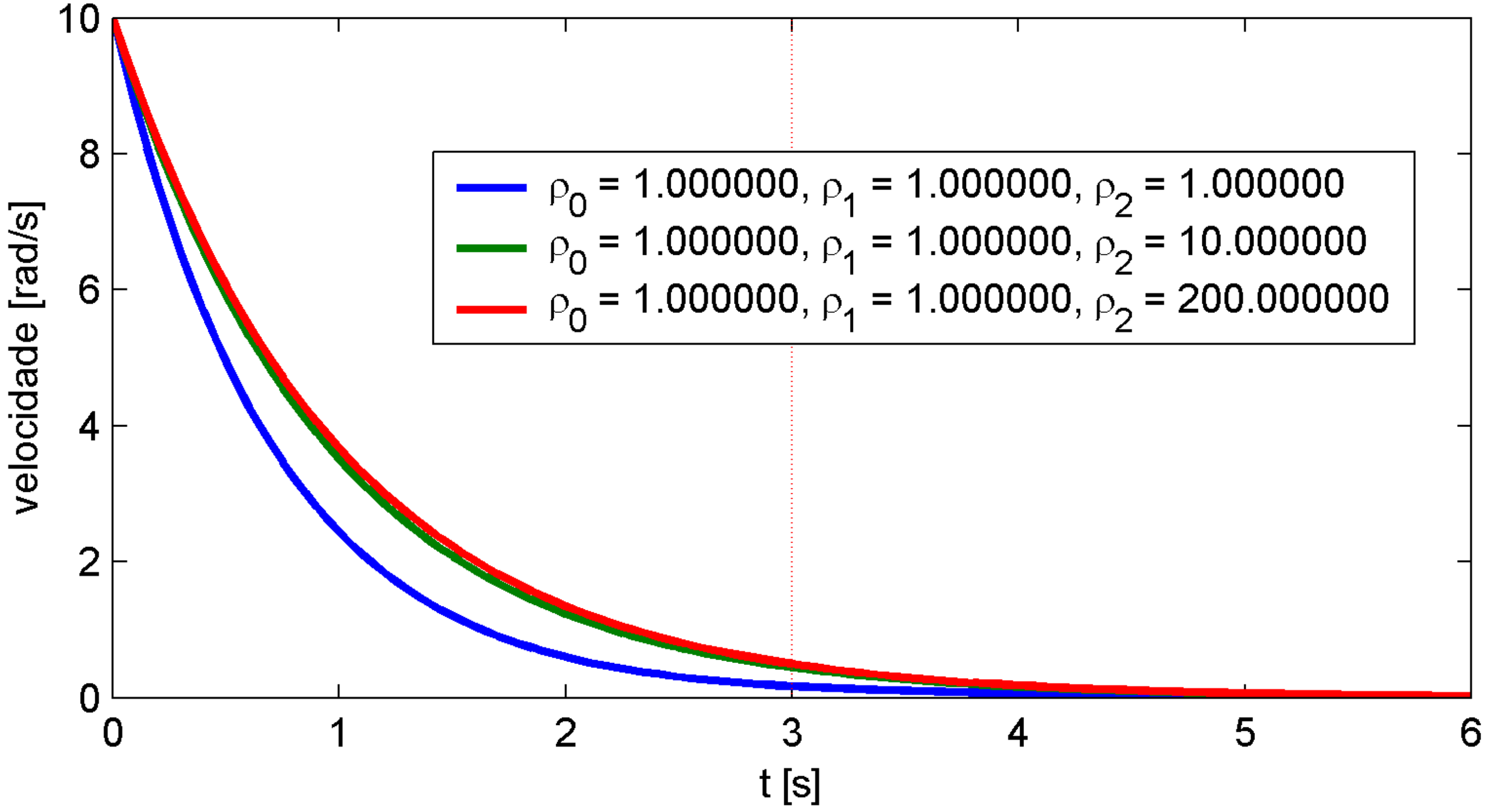
com

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \rho_2.$$

Controle linear quadrático

Exemplo 1. *Controle LQ de motor de corrente contínua acionado por corrente*

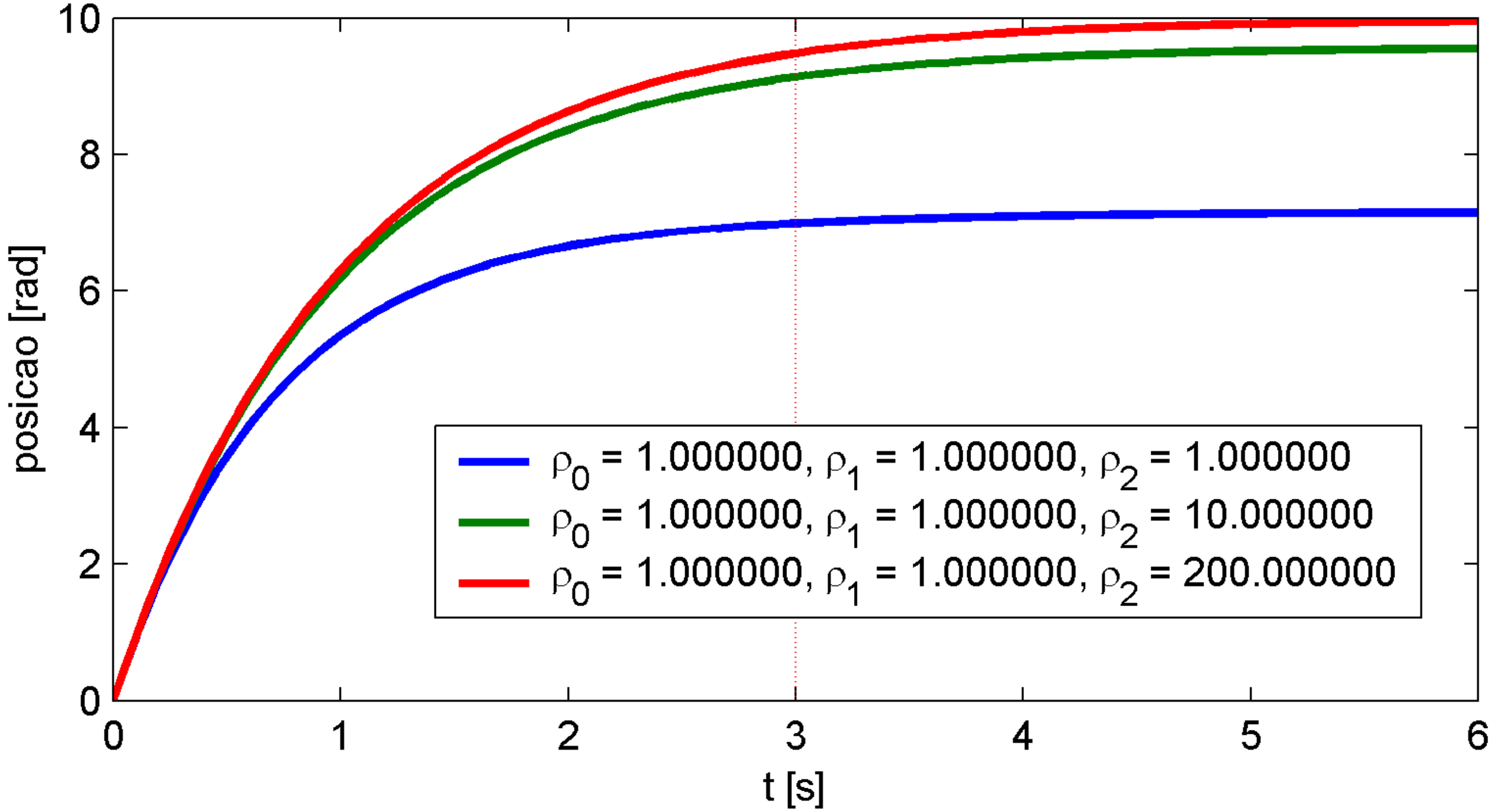
Caso1: fixando $\rho_0 = 1$ e $\rho_1 = 1$, e com $\rho_2 = 1$, 10 ou 200.



Controle linear quadrático

Exemplo 1. *Controle LQ de motor de corrente contínua acionado por corrente*

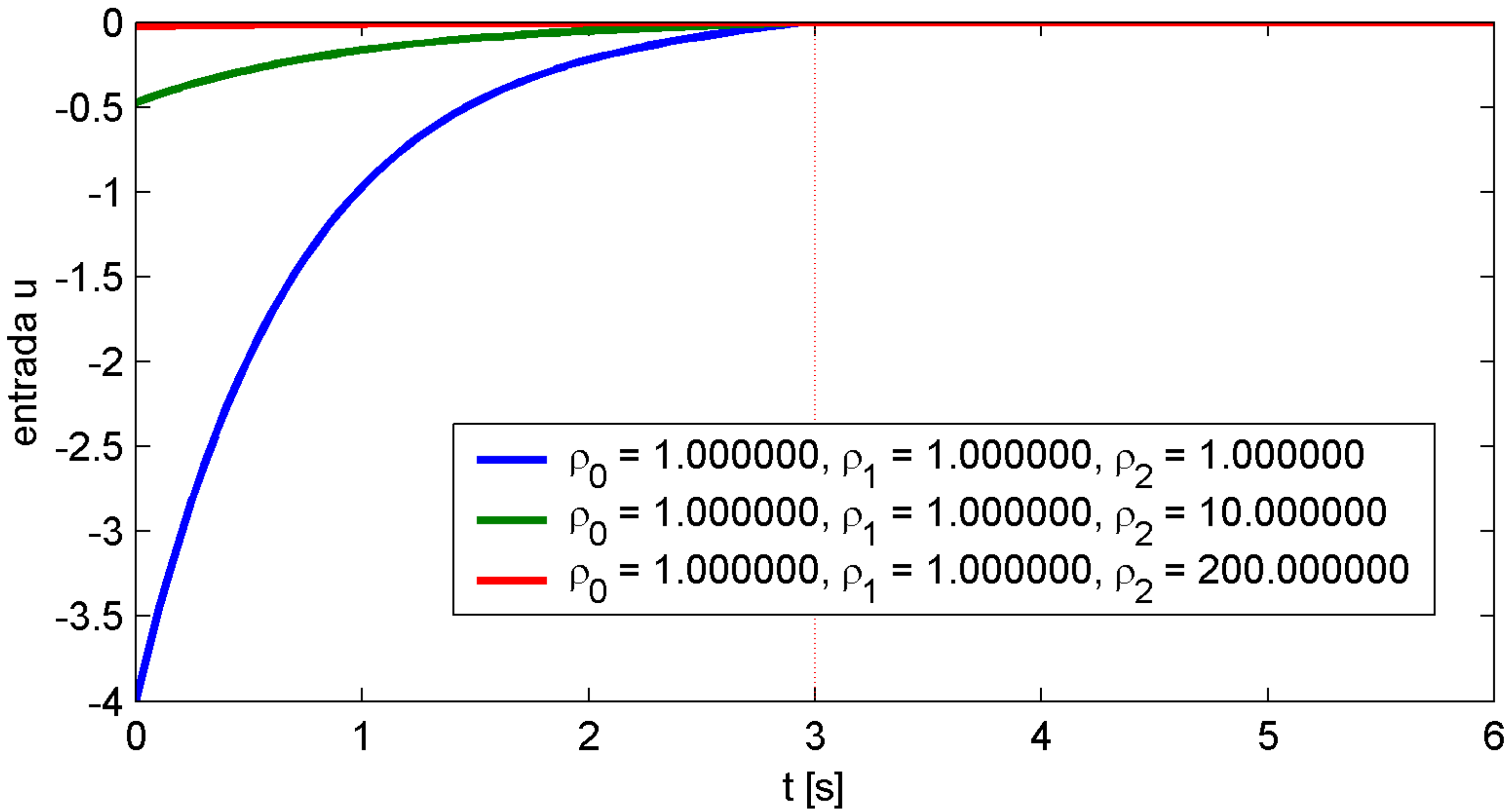
Caso1: fixando $\rho_0 = 1$ e $\rho_1 = 1$, e com $\rho_2 = 1$, 10 ou 200.



Controle linear quadrático

Exemplo 1. *Controle LQ de motor de corrente contínua acionado por corrente*

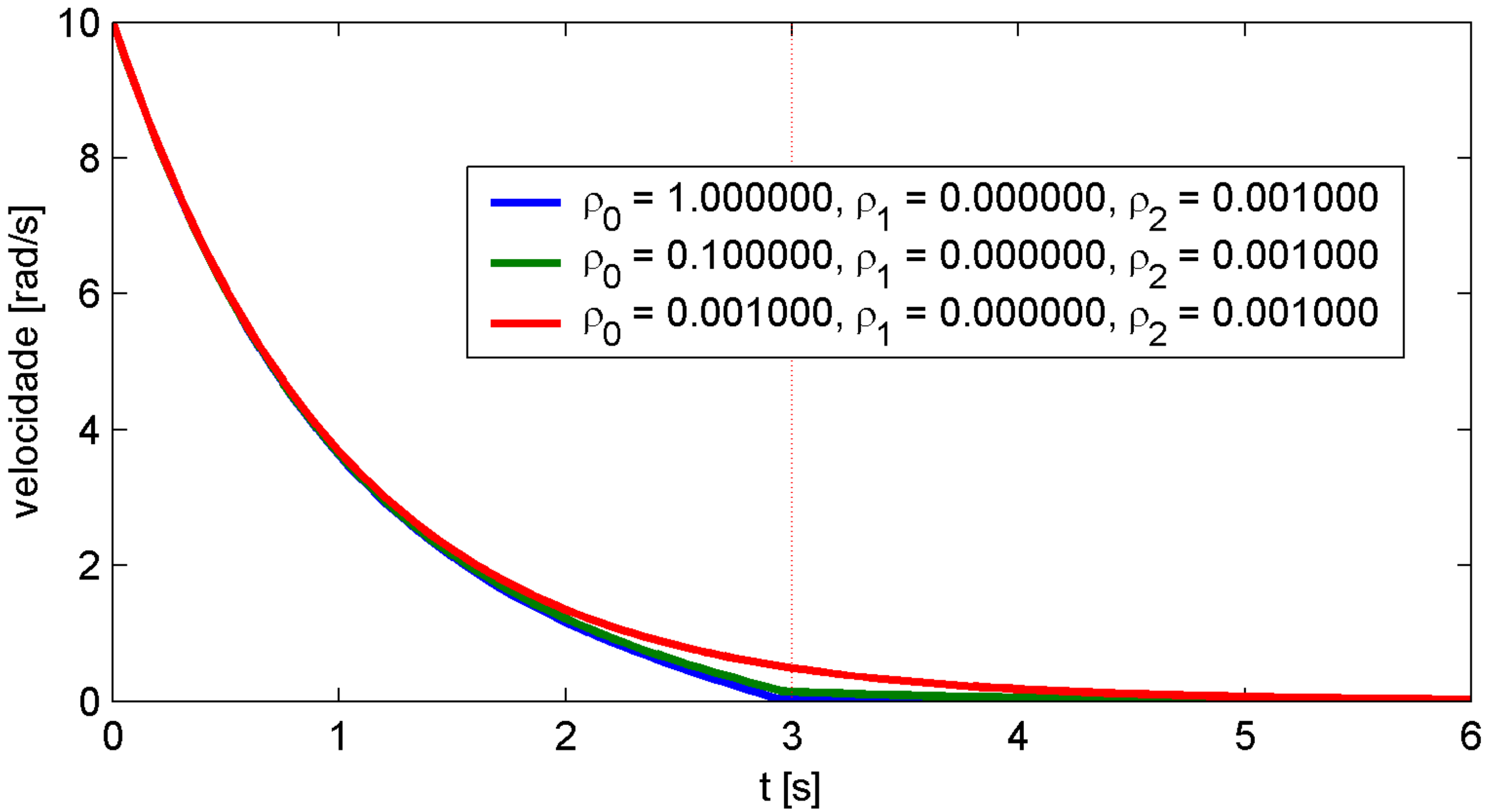
Caso1: fixando $\rho_0 = 1$ e $\rho_1 = 1$, e com $\rho_2 = 1$, 10 ou 200.



Controle linear quadrático

Exemplo 1. *Controle LQ de motor de corrente contínua acionado por corrente*

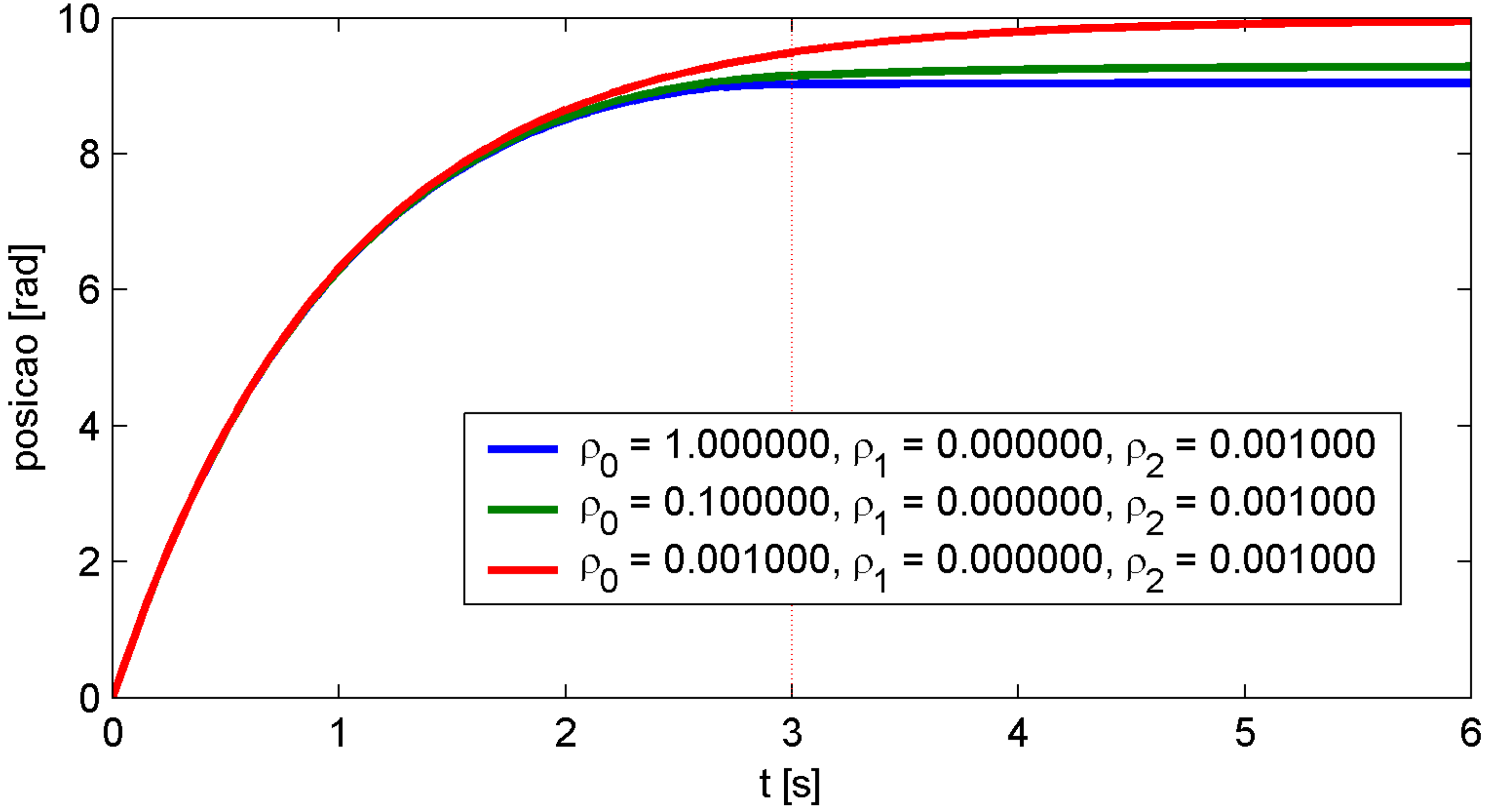
Caso 2: fixando $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 = 10^{-3}$, e com $\rho_0 = 1,\ 10^{-1}$ ou 10^{-3}.



Controle linear quadrático

Exemplo 1. *Controle LQ de motor de corrente contínua acionado por corrente*

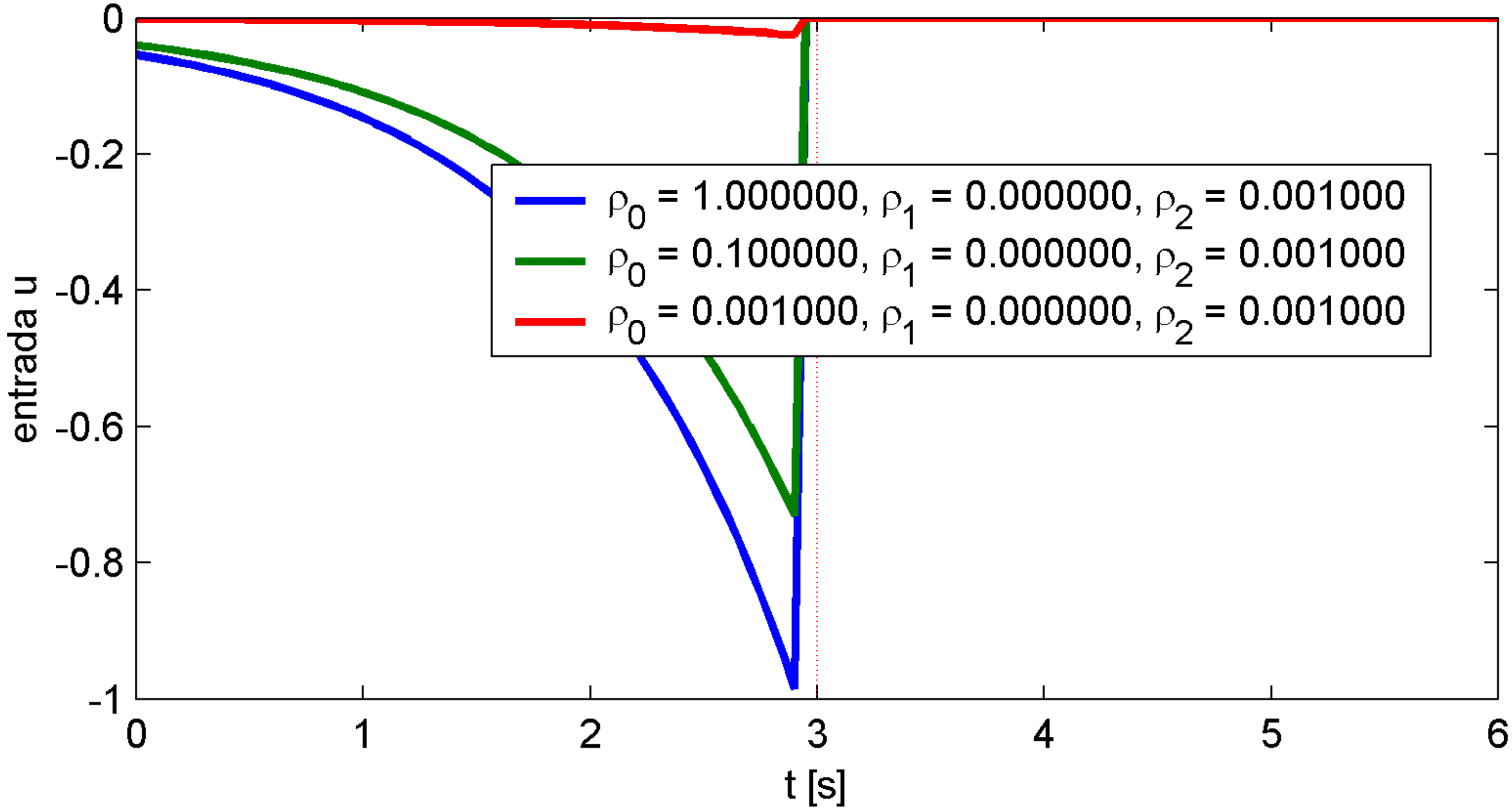
Caso 2: fixando $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 = 10^{-3}$, e com $\rho_0 = 1,\ 10^{-1}$ ou 10^{-3}.



Controle linear quadrático

Exemplo 1. *Controle LQ de motor de corrente contínua acionado por corrente*

Caso 2: fixando $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 = 10^{-3}$, e com $\rho_0 = 1$, 10^{-1} ou 10^{-3}.



Regulador linear quadrático (LQR)

- Características da regulação:
  - Horizonte infinito: $N \rightarrow \infty$
  - O ganho de controle $\mathbf{L}(k)$ tende a ser constante: $\mathbf{L}_\infty$

- Solução pelas equações (problemas simples):

$$\mathbf{L}_\infty = \{\mathbf{Q}_2 + \mathbf{G}^T\mathbf{S}_\infty\mathbf{G}\}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{S}_\infty\tilde{\mathbf{F}} \tag{42}$$

$$\mathbf{S}_\infty = [\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G}\mathbf{L}_\infty]^T\mathbf{S}_\infty[\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G}\mathbf{L}_\infty] + \tilde{\mathbf{Q}}_1 + \mathbf{L}_\infty^T\mathbf{Q}_2\mathbf{L}_\infty \tag{43}$$

Geralmente, mais de uma solução é encontrada para $\mathbf{L}_\infty$. Escolhe-se aquela para a qual $\mathbf{S}_\infty$ é positiva definida.

Regulador linear quadrático (LQR)

- Solução pelo método dos autovalores:

  O critério de tempo finito é minimizado quando são satisfeitas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^T(k)\mathbf{Q}_2 &= -\lambda^T(k+1)\mathbf{G} && (44) \\ \mathbf{x}^T(k)\tilde{\mathbf{Q}}_1 &= \lambda^T(k)-\lambda^T(k+1)\tilde{\mathbf{F}} && (45) \\ \mathbf{x}(k+1) &= \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k)+\mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}}(k) && (46) \end{aligned}$$

  Aplicando (44) em (46), estas equações se transformam em

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= (\tilde{\mathbf{F}}+\mathbf{G}\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{G}^T\tilde{\mathbf{F}}^{-T}\mathbf{Q}_1)\mathbf{x}(k)-\mathbf{G}\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{G}^T\tilde{\mathbf{F}}^{-T}\lambda(k) && (47) \\ \lambda(k+1) &= -\tilde{\mathbf{F}}^{-T}\tilde{\mathbf{Q}}_1\mathbf{x}(k)+\tilde{\mathbf{F}}^{-T}\lambda(k) && (48) \end{aligned}$$

Regulador linear quadrático (LQR)

- Solução pelo método dos autovalores:

  que pode ser escrito sob a forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{pmatrix} = \mathbf{H}_c \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \lambda(k) \end{pmatrix} \tag{49}$$

  com $\mathbf{H}_c$ sendo chamada Hamiltoniano e dado por

$$\mathbf{H}_c = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}} + \mathbf{G}\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{G}^T\tilde{\mathbf{F}}^{-T}\mathbf{Q}_1 & -\mathbf{G}\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{G}^T\tilde{\mathbf{F}}^{-T} \\ -\tilde{\mathbf{F}}^{-T}\tilde{\mathbf{Q}}_1 & \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \end{pmatrix}. \tag{50}$$

  $\mathbf{x}(N)$ e $\lambda(N)$ podem ser obtidos a partir de $\mathbf{x}(0)$ e $\lambda(0)$ pela seguinte fórmula:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(N) \\ \lambda(N) \end{pmatrix} = \mathbf{H}_c^N \begin{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \lambda(0) \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Regulador linear quadrático (LQR)

- Solução pelo método dos autovalores:

  A solução para o problema LQR pode ser obtida quando $N \to \infty$. Pode-se mostrar que $\mathbf{H}_c$ possui $2n$ autovalores, dos quais n deles são estáveis e os outros n autovalores restantes são instáveis. Na verdade, para cada autovalor z_i existe um outro autovalor dado por $1/z_i$. Assim, definindo-se $\mathbf{E}$ como sendo a matriz diagonal dos n autovalores instáveis, define-se

$$\mathbf{H}_c^* = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{H}_c\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \tag{52}$$

  com $\mathbf{V}$ sendo a matrix de autovetores de $\mathbf{H}_c$:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_i & \mathbf{X}_o \\ \mathbf{L}_i & \mathbf{L}_o \end{pmatrix} \tag{53}$$

  com o indice i (resp. o) indicando as componentes dos autovetores estáveis (resp. instáveis).

Regulador linear quadrático (LQR)

- Solução pelo método dos autovalores:

  A seguinte transformação de variáveis

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^*(k) \\ \lambda^*(k) \end{pmatrix} = \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \lambda(k) \end{pmatrix} \tag{54}$$

  resulta em

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^*(N) \\ \lambda^*(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{-N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^*(0) \\ \lambda^*(0) \end{pmatrix} \tag{55}$$

  Quando $N \to \infty$, $\mathbf{x}^*(N)$ deve ir para $\mathbf{0}$ enquanto $\lambda^*(N)$ deve ir para o infinito ($\mathbf{E}^N$ é instável). A única solução para se ter $\lambda^*(N)$ finito é quando $\lambda^*(0) = \mathbf{0}$, levando $\lambda^*(N) = \mathbf{0}$. Assim sendo, a solução finitita para $\mathbf{x}(N)$ e $\lambda(N)$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(N) &= \mathbf{X}_i\mathbf{x}^*(N) + \mathbf{X}_o\lambda^*(N) = \mathbf{X}_i\mathbf{E}^{-N}\mathbf{x}^*(0) && (56) \\ \lambda(N) &= \mathbf{L}_i\mathbf{x}^*(N) + \mathbf{L}_o\lambda^*(N) = \mathbf{L}_i\mathbf{E}^{-N}\mathbf{x}^*(0) && (57) \end{aligned}$$

Regulador linear quadrático (LQR)

- Solução pelo método dos autovalores:

  Dado que $\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{E}^N \mathbf{X}_i^{-1} \mathbf{x}(N)$, tem-se

$$\lambda(N) = \mathbf{L}_i \mathbf{E}^{-N} \mathbf{E}^N \mathbf{X}_i^{-1} \mathbf{x}(N) = \mathbf{L}_i \mathbf{X}_i^{-1} \mathbf{x}(N)$$

  Sabendo que $\lambda(k) = \mathbf{S}(k)\mathbf{x}(k)$, isto leva a $\mathbf{S}(k) = \mathbf{L}_i \mathbf{X}_i^{-1}$.

  Portanto,

$$\mathbf{S}_\infty = \mathbf{L}_i \mathbf{X}_i^{-1}. \tag{58}$$

$$\mathbf{L}_\infty = \{\mathbf{Q}_2 + \mathbf{G}^T \mathbf{S}_\infty \mathbf{G}\}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{S}_\infty \tilde{\mathbf{F}} \tag{59}$$

Estimação ótima (filtragem estocástica)

- Filtro de Kalman
  - Seja o seguinte modelo linear estocástico:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k)+\mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k)+\mathbf{w}(k) \tag{60}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k)+\mathbf{v}(k) \tag{61}$$

com $\mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\mathbf{Q}(k))$ e $\mathbf{v}(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\mathbf{R}(k))$ sendo processos gaussianos representando incertezas na evolução das variáveis de estado $\mathbf{x}(k)$ e na medição $\mathbf{y}(k)$, respectivamente.

Estimação ótima (filtragem estocástica)

- Filtro de Kalman

  - Sendo $\mathbf{x}(k)$ também um processo gaussiano, entre medições, sua estimativa $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ é obtida por predição:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{F}(k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1)+\mathbf{G}(k-1)\mathbf{u}(k-1) \tag{62}$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{F}(k-1)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{F}^T(k-1)+\mathbf{Q}(k) \tag{63}$$

  com $\mathbf{P}(k|k-1) \triangleq E\{(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)-\mathbf{x}(k)) \cdot (\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)-\mathbf{x}(k))^T\}$ sendo a matrix de covariâncias do erro de predição.

Estimação ótima (filtragem estocástica)

- Filtro de Kalman
  - Quando medições $\mathbf{y}(k)$ são realizadas, estas são usadas para corrigir o processo de predição e obter uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}(k)$ pela relação seguinte:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot (\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k-1)) && (64) \\ \mathbf{P}(k) &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k))\,\mathbf{P}(k|k-1) && (65) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k))\,\mathbf{P}(k|k-1)\,(\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k))^T + \mathbf{K}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{K}^T(k) && (66) \end{aligned}$$

com $\mathbf{P}(k) \stackrel{\Delta}{=} E\{(\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k)) \cdot (\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k))^T\}$ sendo a matrix de covariâncias do erro de estimação. $\mathbf{K}(k)$ é o chamado ganho de Kalman, e é dado por

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T(k)\left(\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)\right)^{-1} \qquad (67)$$

Estimação ótima (filtragem estocástica)

- Filtro de Kalman
  - As equações do filtro resultam em um estimador recursivo de mínima variância de $\mathbf{x}(k)$:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \arg\min E\{(\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k))^T \cdot (\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k))\} \quad (68)$$

$$= \arg\min Tr(\mathbf{P}(k)) \quad (69)$$

    ou ainda, para o caso linear, temos o estimador de máximo de verosemelhança:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \arg\max\ p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(k)). \quad (70)$$

  - O termo $\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ é chamado de inovação, e portanto as equações (64)-(66) são denominadas de *formulação inovação*.

Estimação ótima (filtragem estocástica)

- Filtro de Kalman
  - As matrizes de covariâncias $\mathbf{P}(k)$, $\mathbf{Q}(k)$ e $\mathbf{R}(k)$ são uma medida do quanto de incerteza está envolvida no processo de estimação. Por analogia, suas inversas são chamadas de matrizes de informação, para as quais a *formulação informação* pode ser aplicada:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{P}(k)\left(\mathbf{P}^{-1}(k|k-1)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{H}^T(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{y}(k)\right) \quad (71)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(k) = \mathbf{P}^{-1}(k|k-1) + \mathbf{H}^T(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{H}(k) \quad (72)$$

  - Da equação (72), conclui-se que a informação da estimativa é a soma das informações aportadas pela predição e pelas medições. Ou seja, o filtro extrai o necessário de informação do sistema.

Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 2. *Fusão sensorial usando o filtro de Kalman*

São dados: x_a e x_b medições de uma grandeza x obtidas por dois sensores S_A e S_B, respectivamente. σ_a^2 e σ_b^2 são as variâncias associadas.

Considerando x_a como informação *a priori* (predição) e x_b a informação obtida por medição, a estimativa x_c de mínima variância é obtida pelo uso do filtro de Kalman:

$$x_c = x_a \frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2} + x_b \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

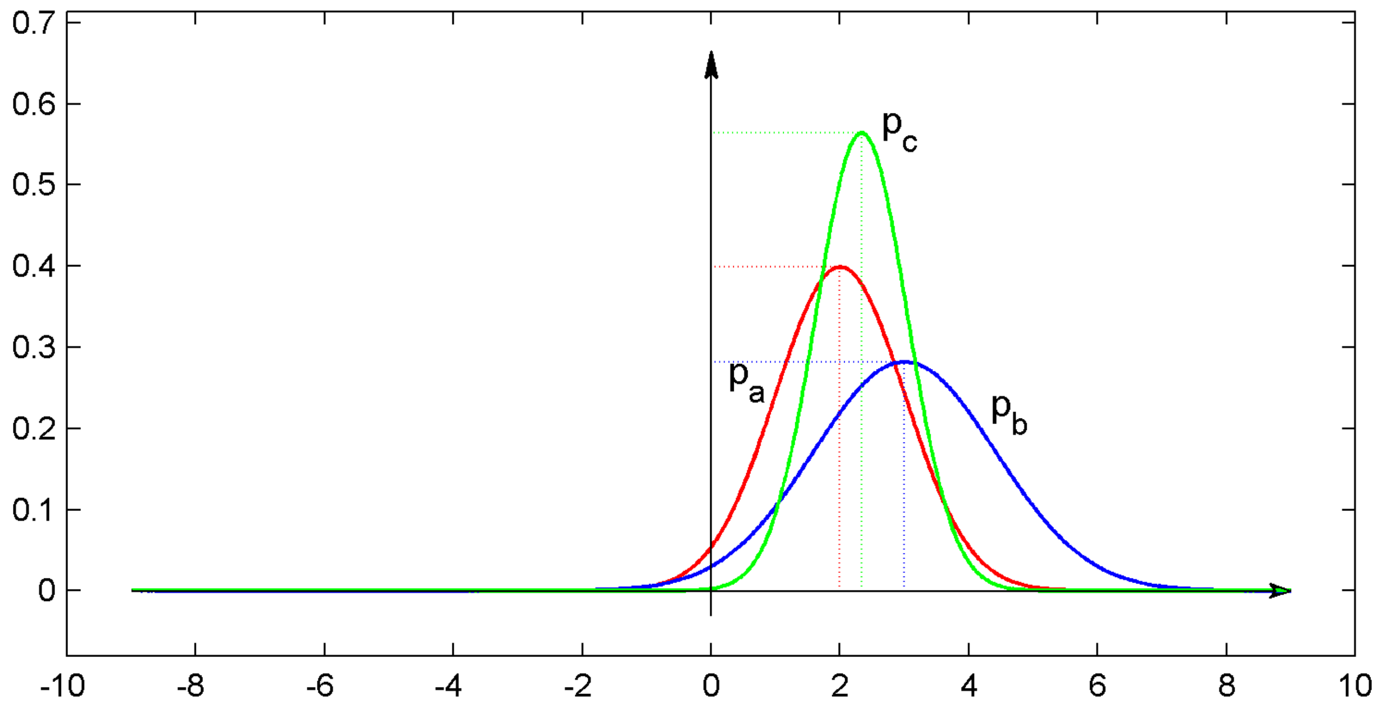
e sua variância é dada por

$$\sigma_c^2 = \frac{\sigma_a^2 \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

ou ainda $\left(\sigma_c^2\right)^{-1} = \left(\sigma_a^2\right)^{-1} + \left(\sigma_b^2\right)^{-1}$, ou seja, as informações se somam.

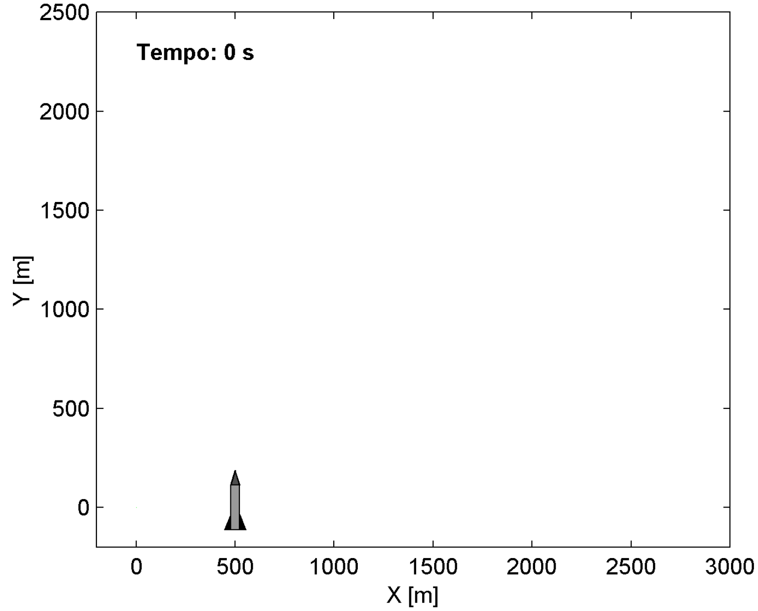
Estimação ótima (filtragem estocástica)

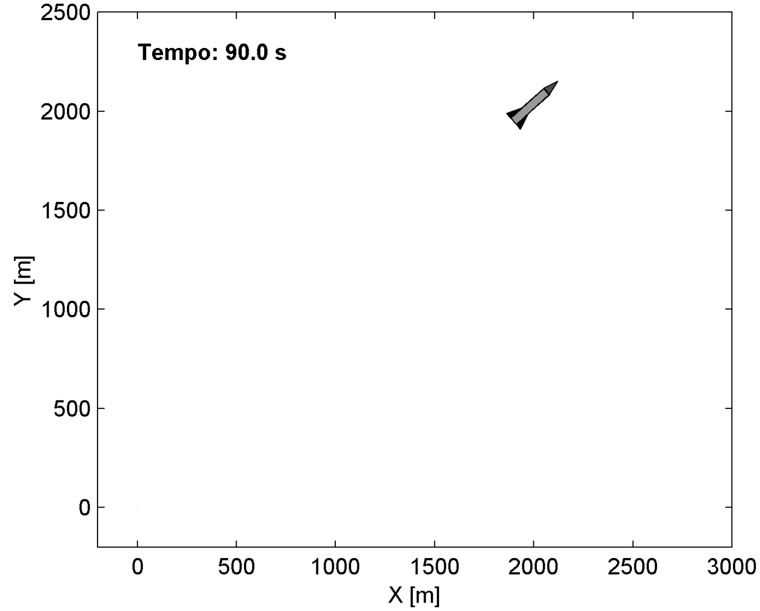
Exemplo 2. *Fusão sensorial usando o filtro de Kalman*



Estimação ótima (filtragem estocástica)

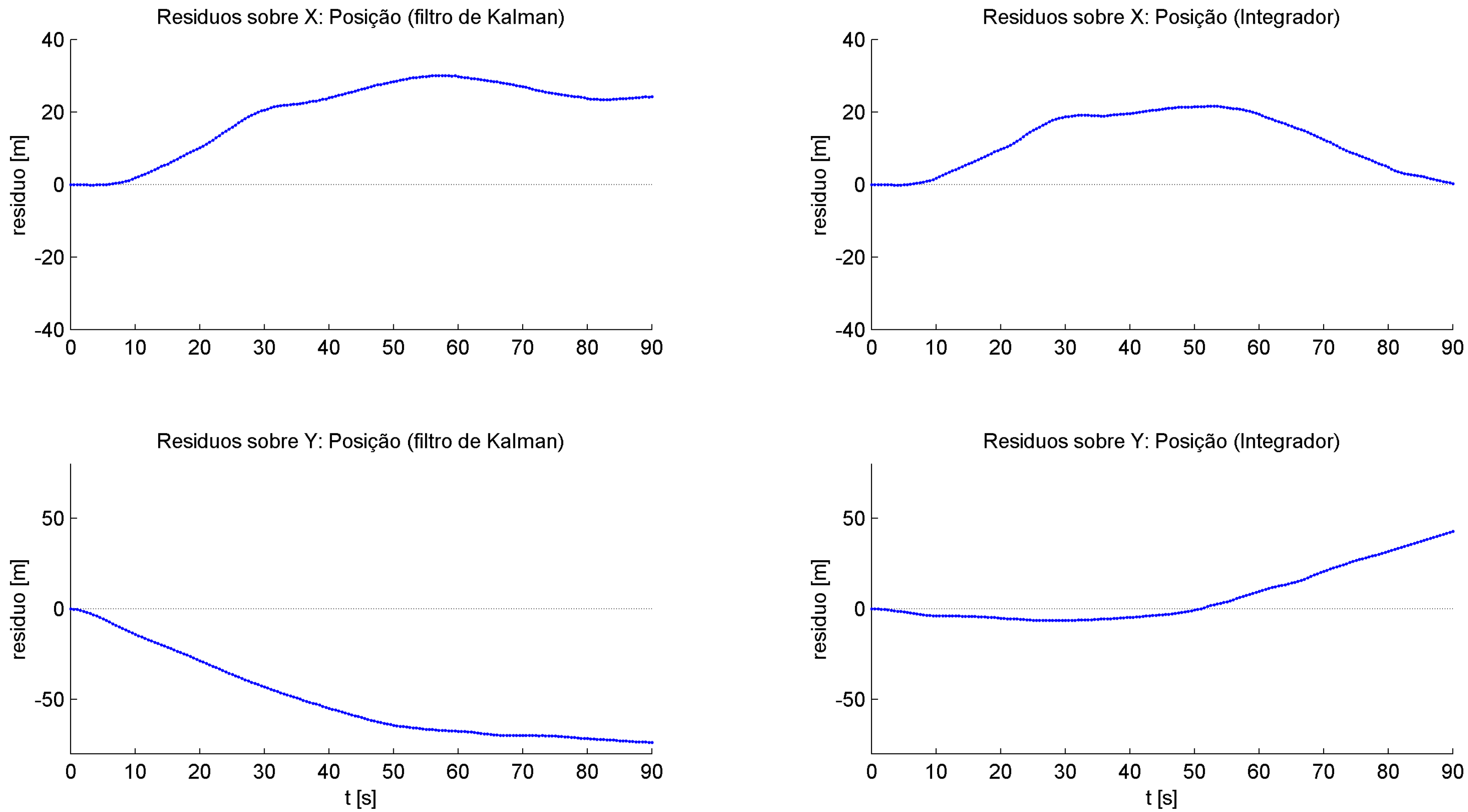
Exemplo 3. *Estimação de posição de míssil equipado com central inercial*





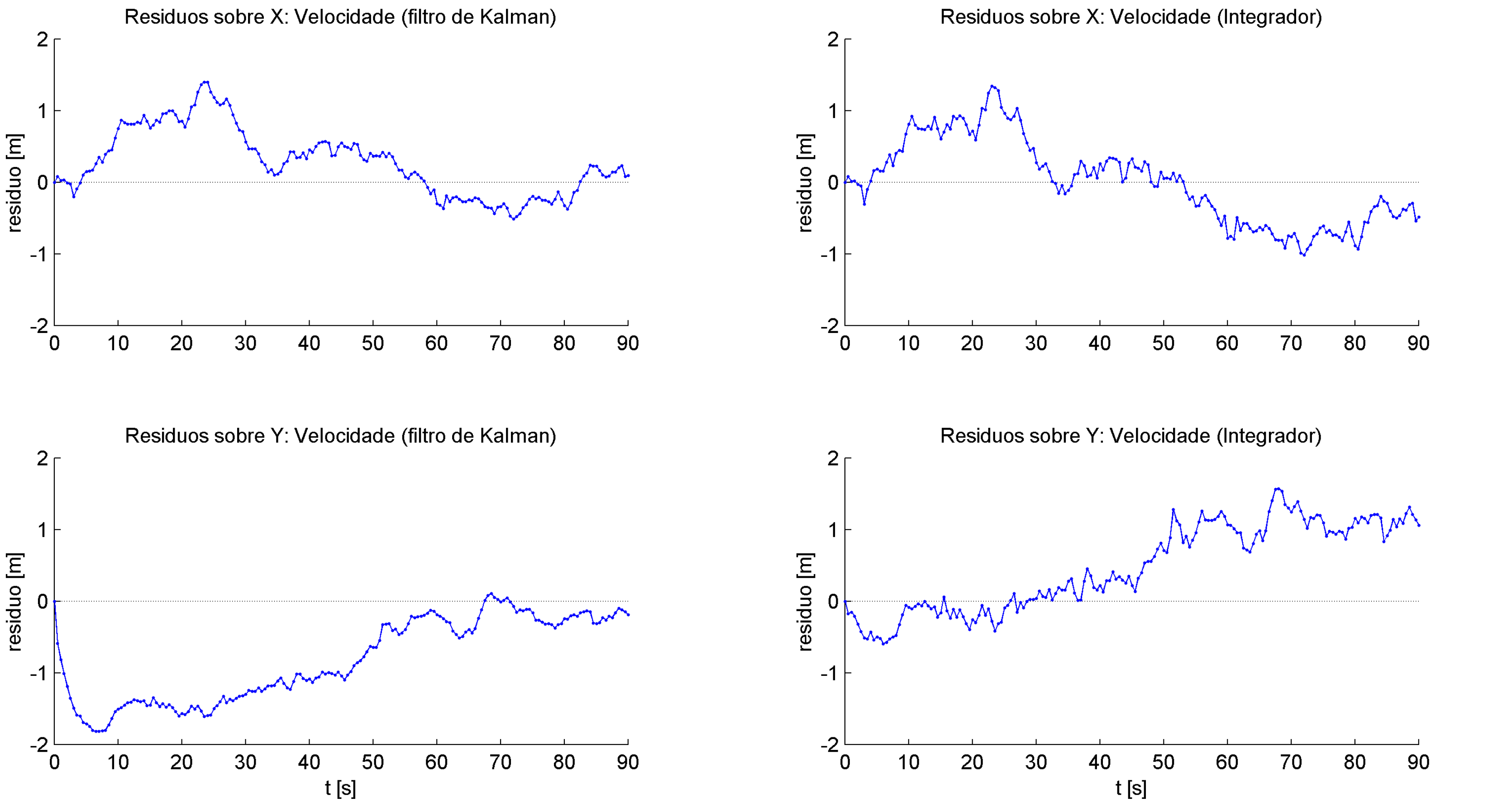
Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 3. *Estimação de posição de míssil equipado com central inercial*



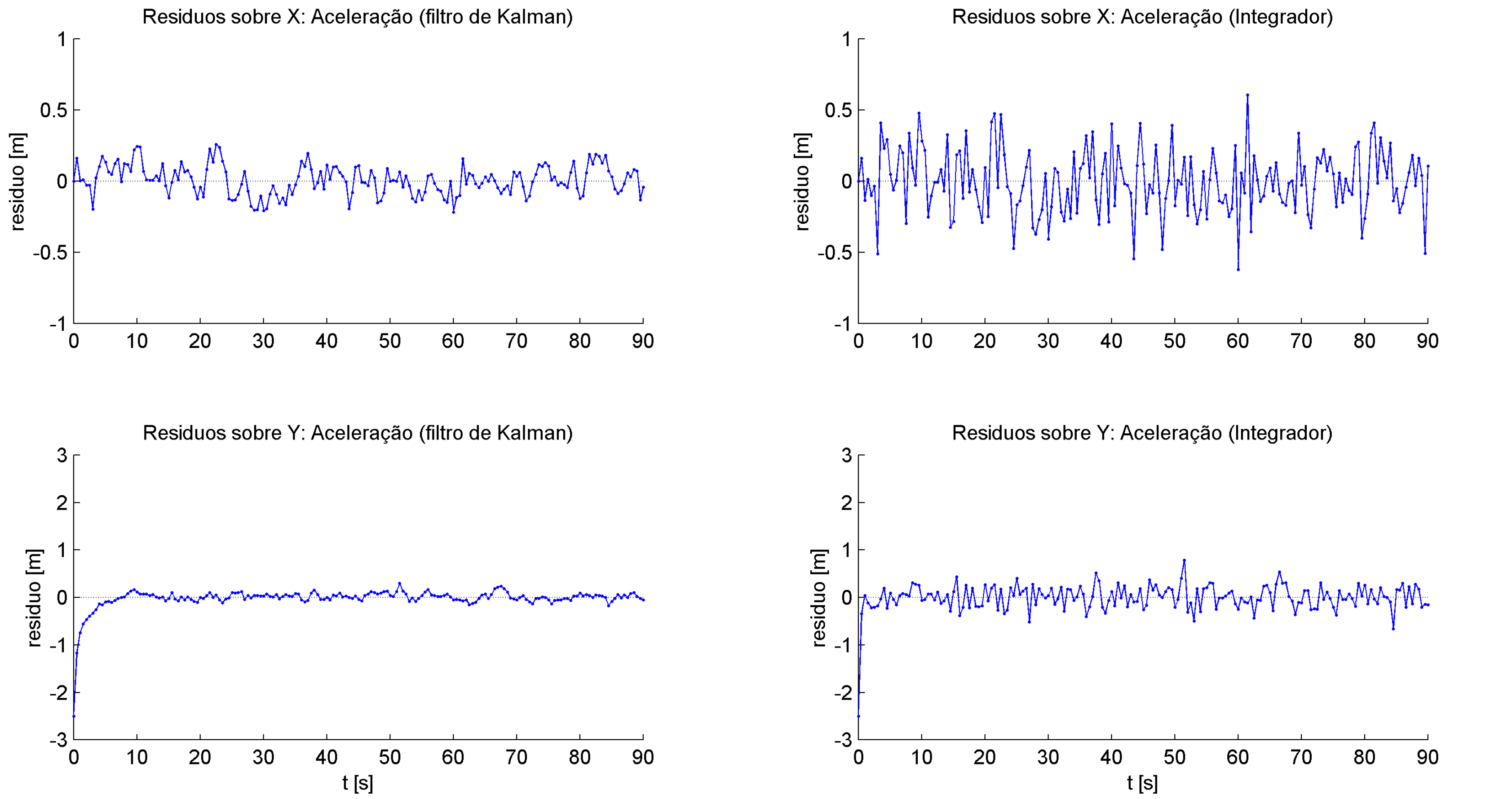
Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 3. *Estimação de posição de míssil equipado com central inercial*



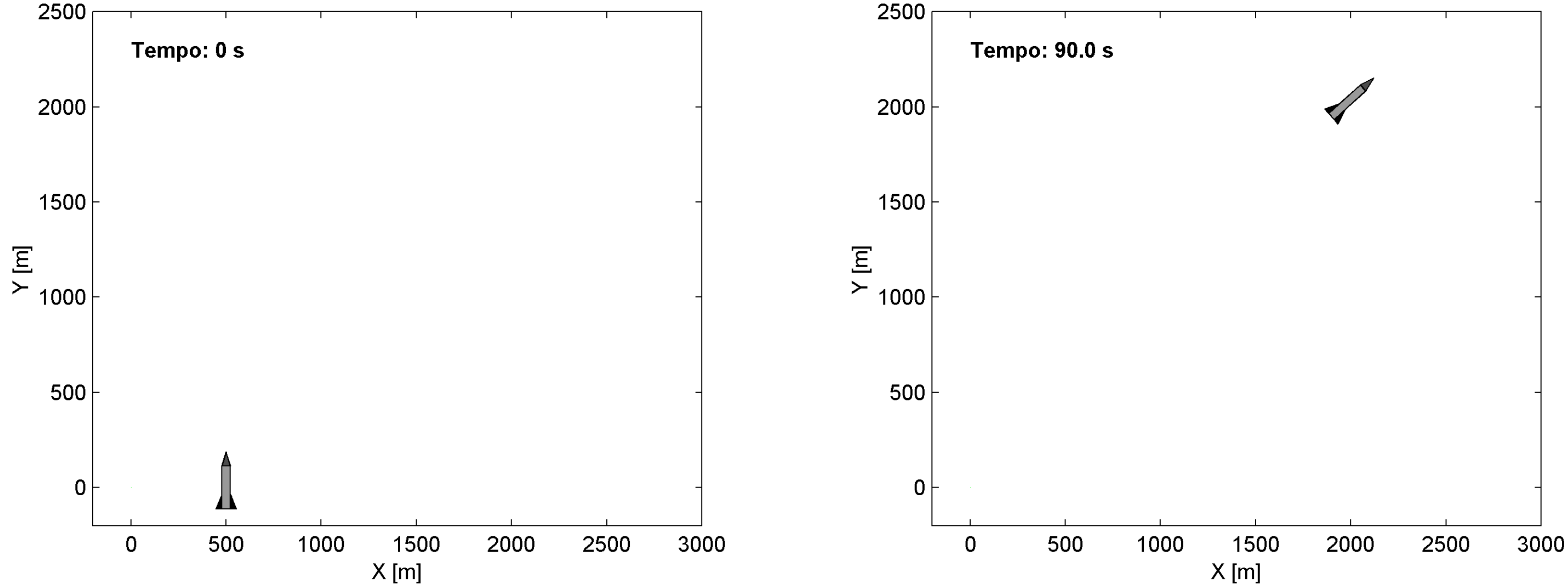
Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 3. *Estimação de posição de míssil equipado com central inercial*



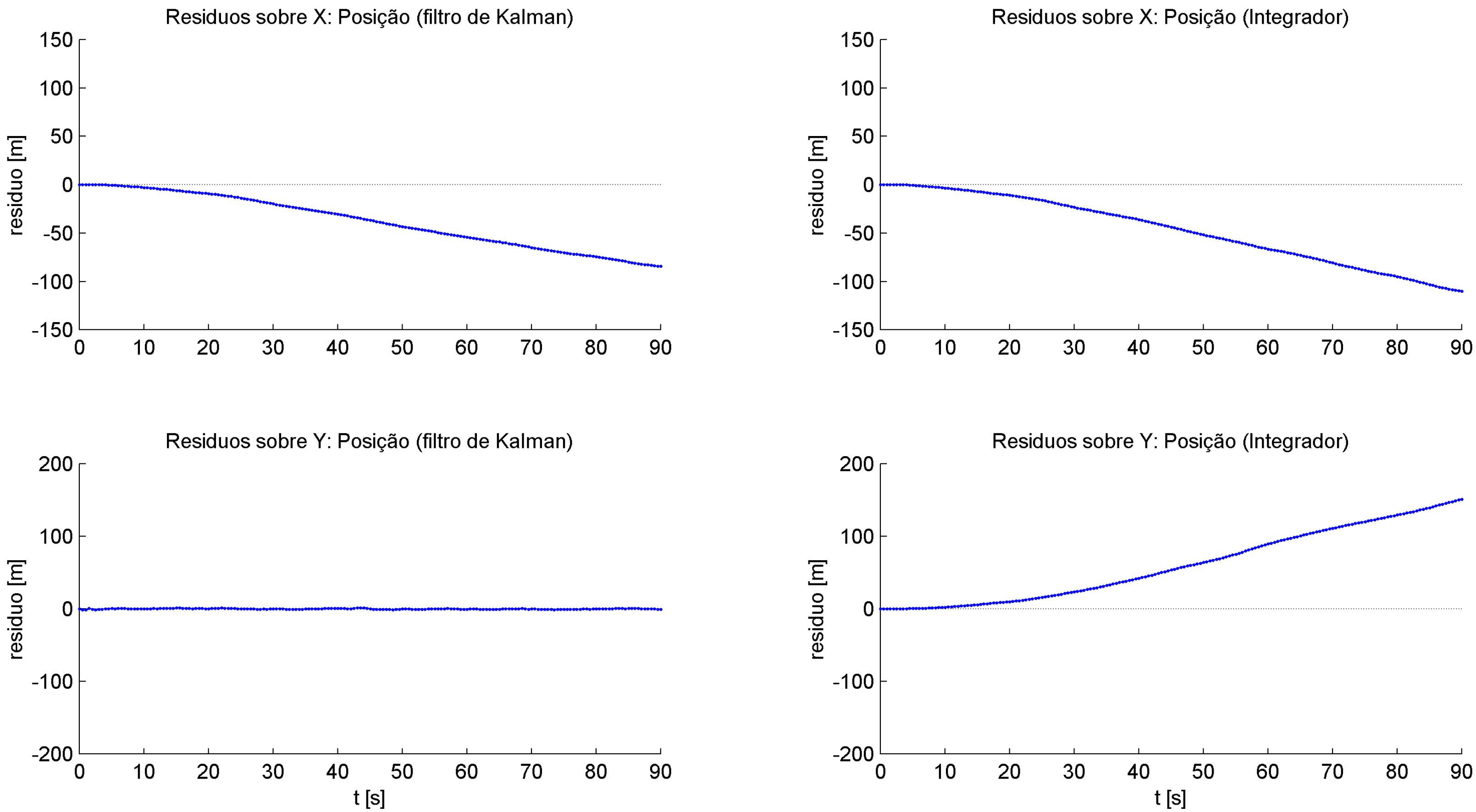
Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 4. *Estimação de posição de míssil com central inercial e altímetro*



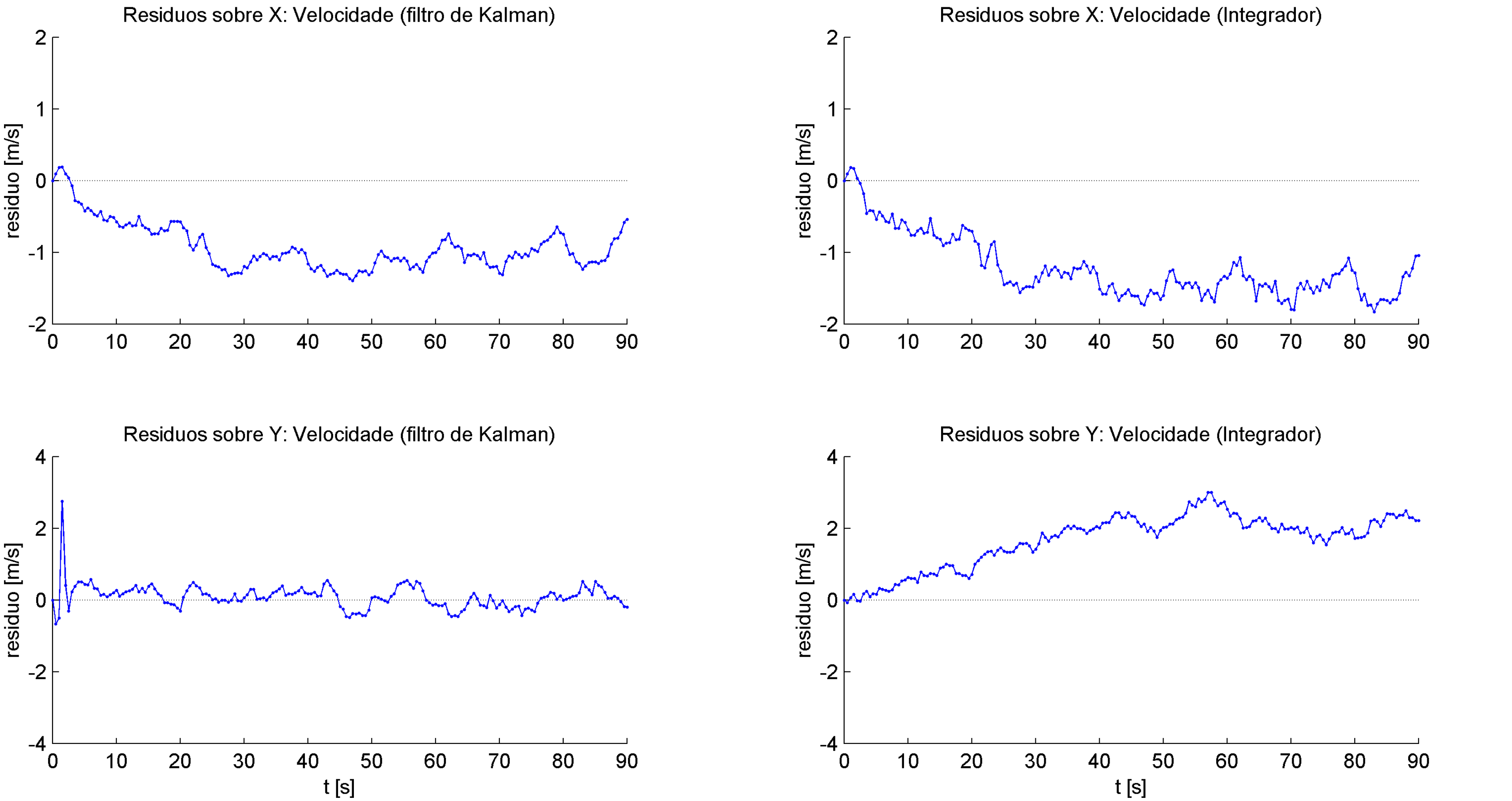
Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 4. *Estimação de posição de míssil com central inercial e altímetro*



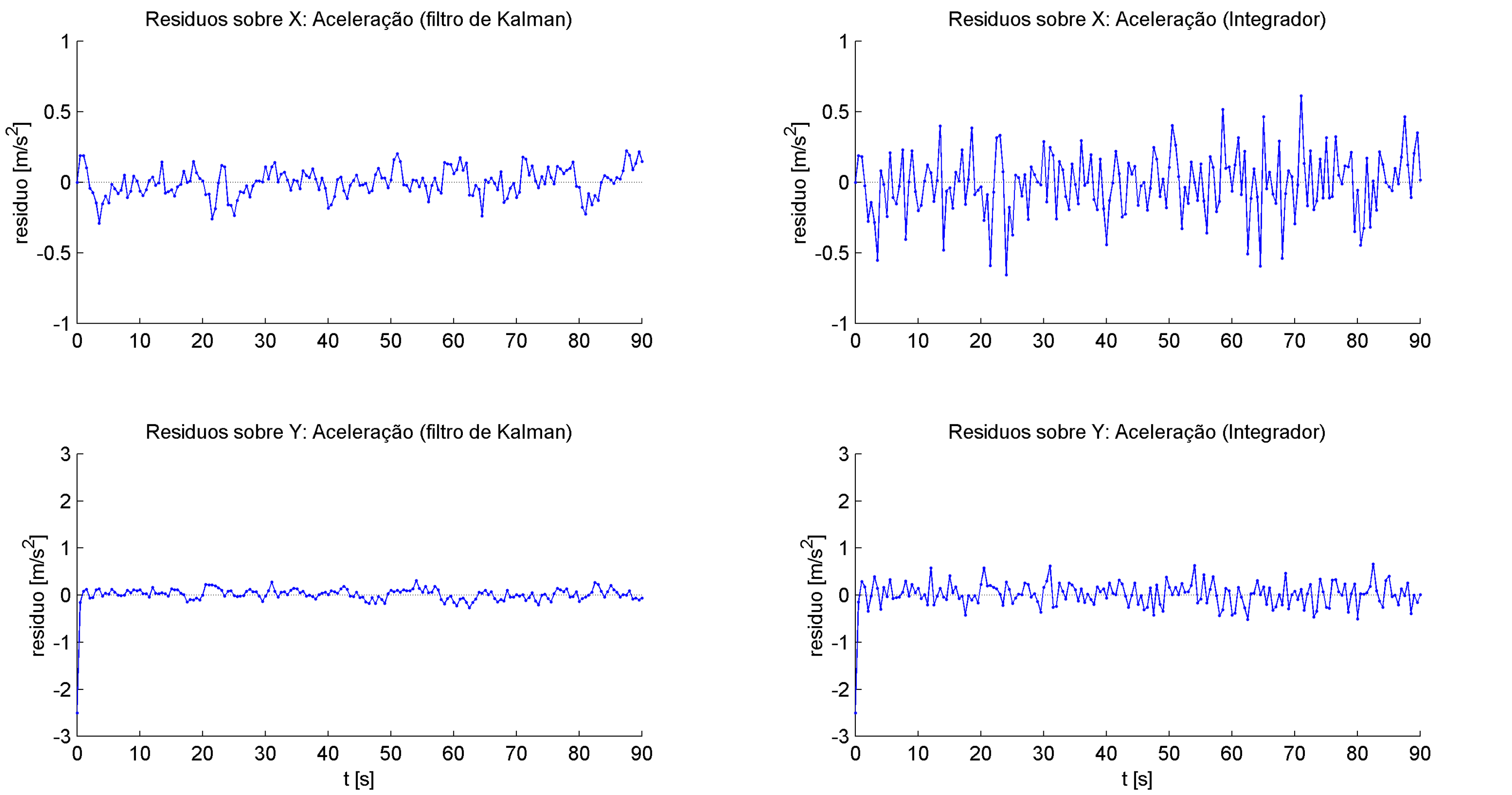
Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 4. *Estimação de posição de míssil com central inercial e altímetro*



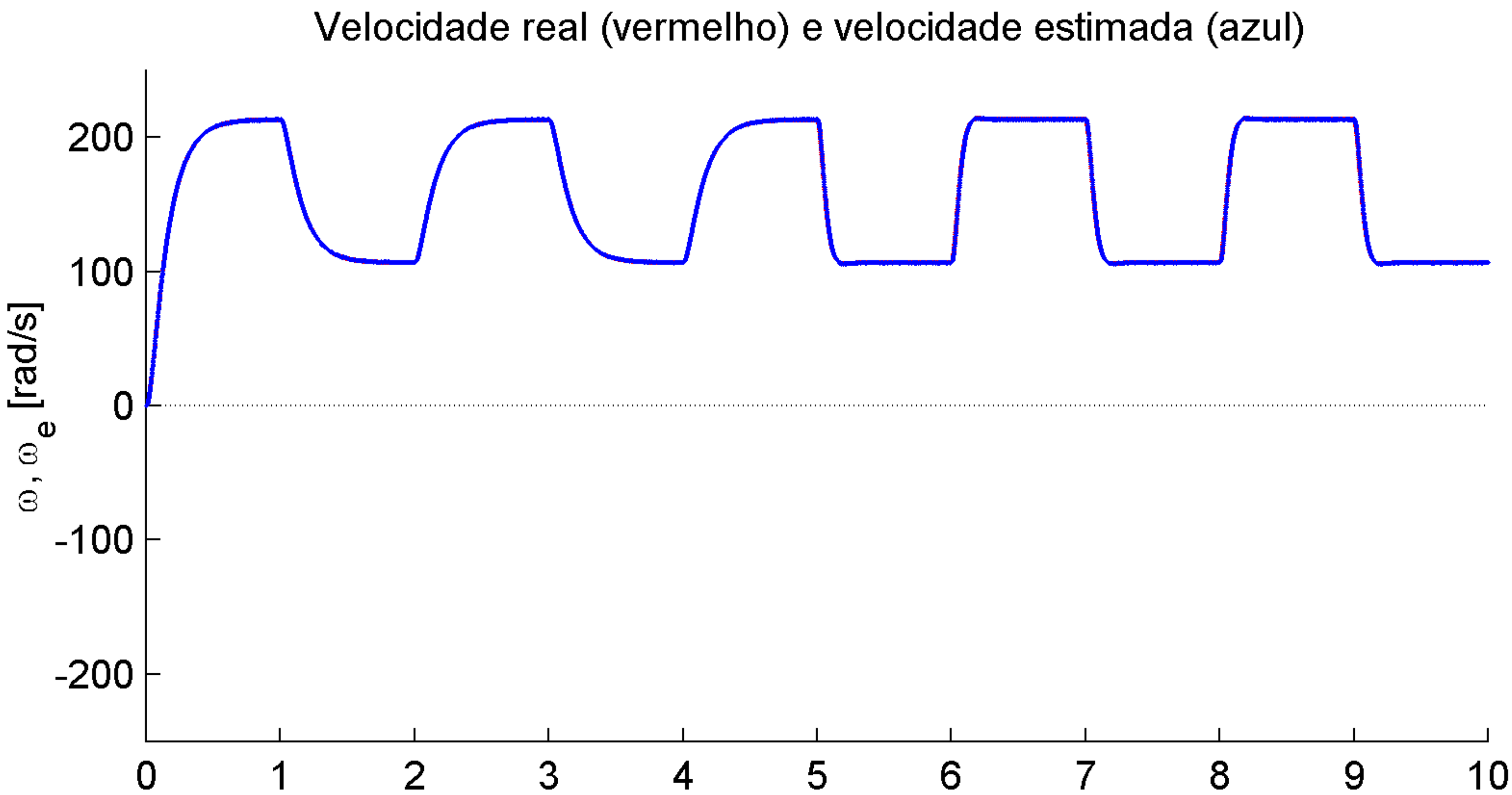
Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 4. *Estimação de posição de míssil com central inercial e altímetro*



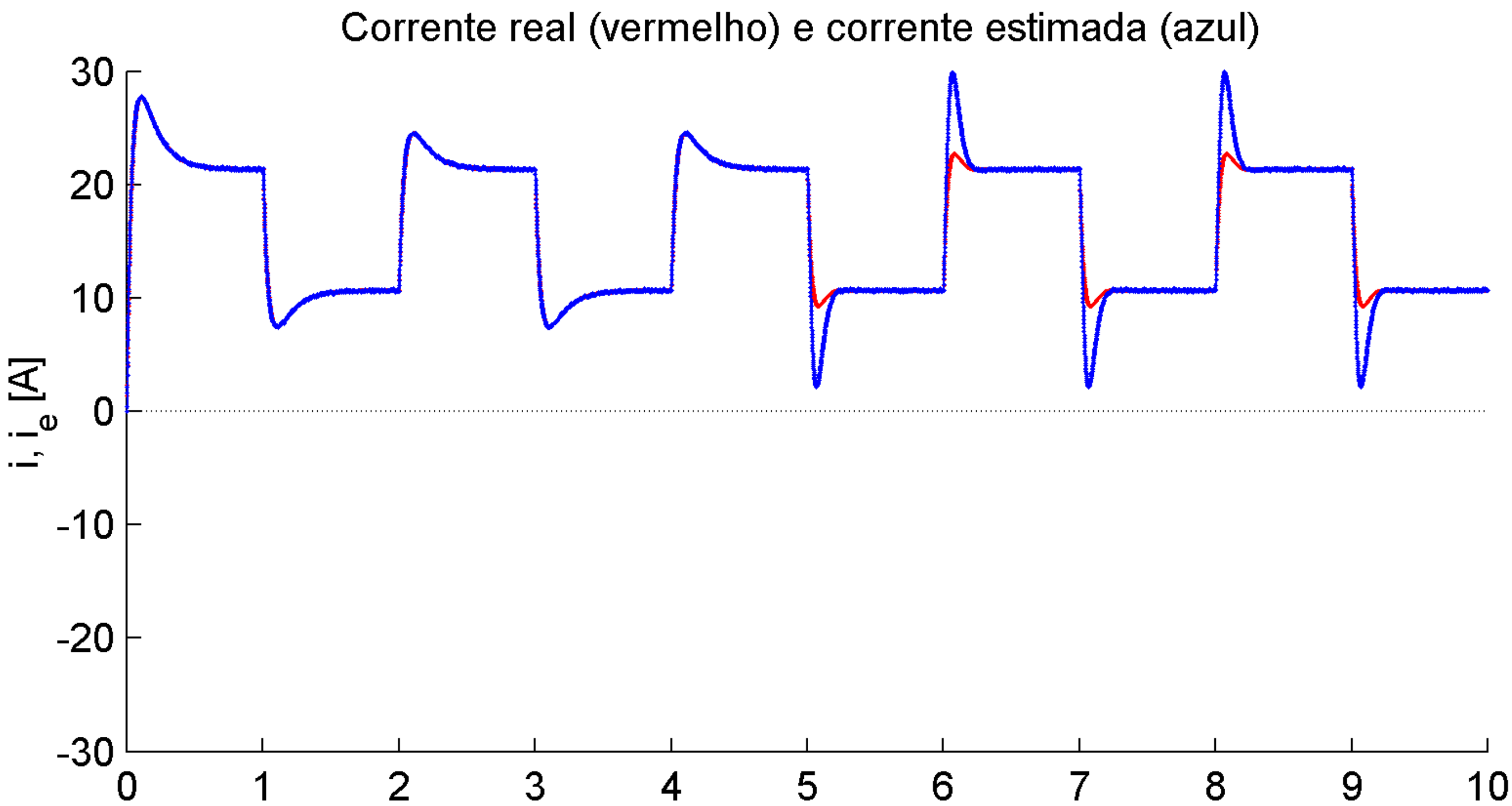
Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 5. *Detecção de falha em motor de corrente contínua*



Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 5. *Detecção de falha em motor de corrente contínua*

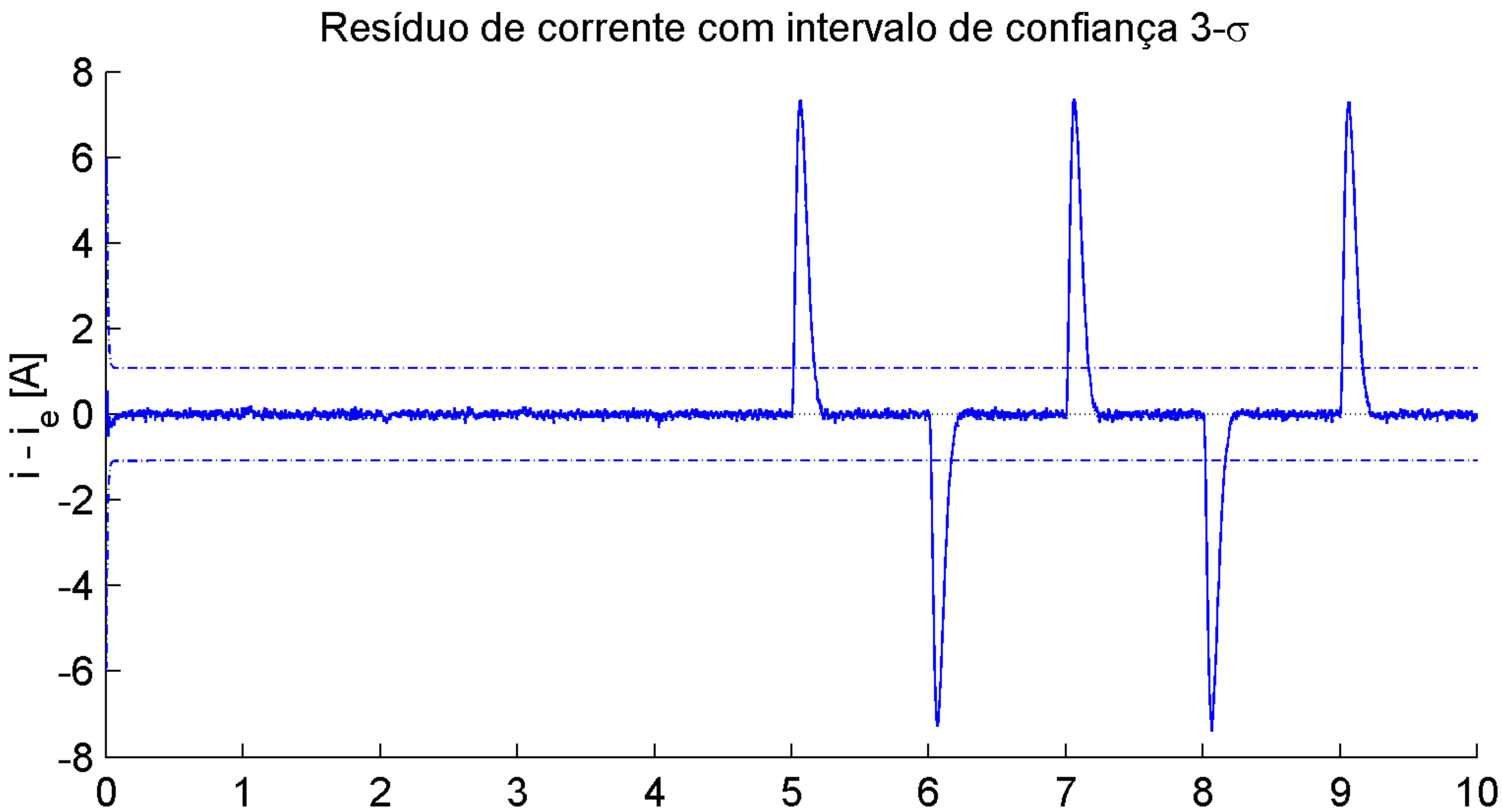


Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 5. *Detecção de falha em motor de corrente contínua*

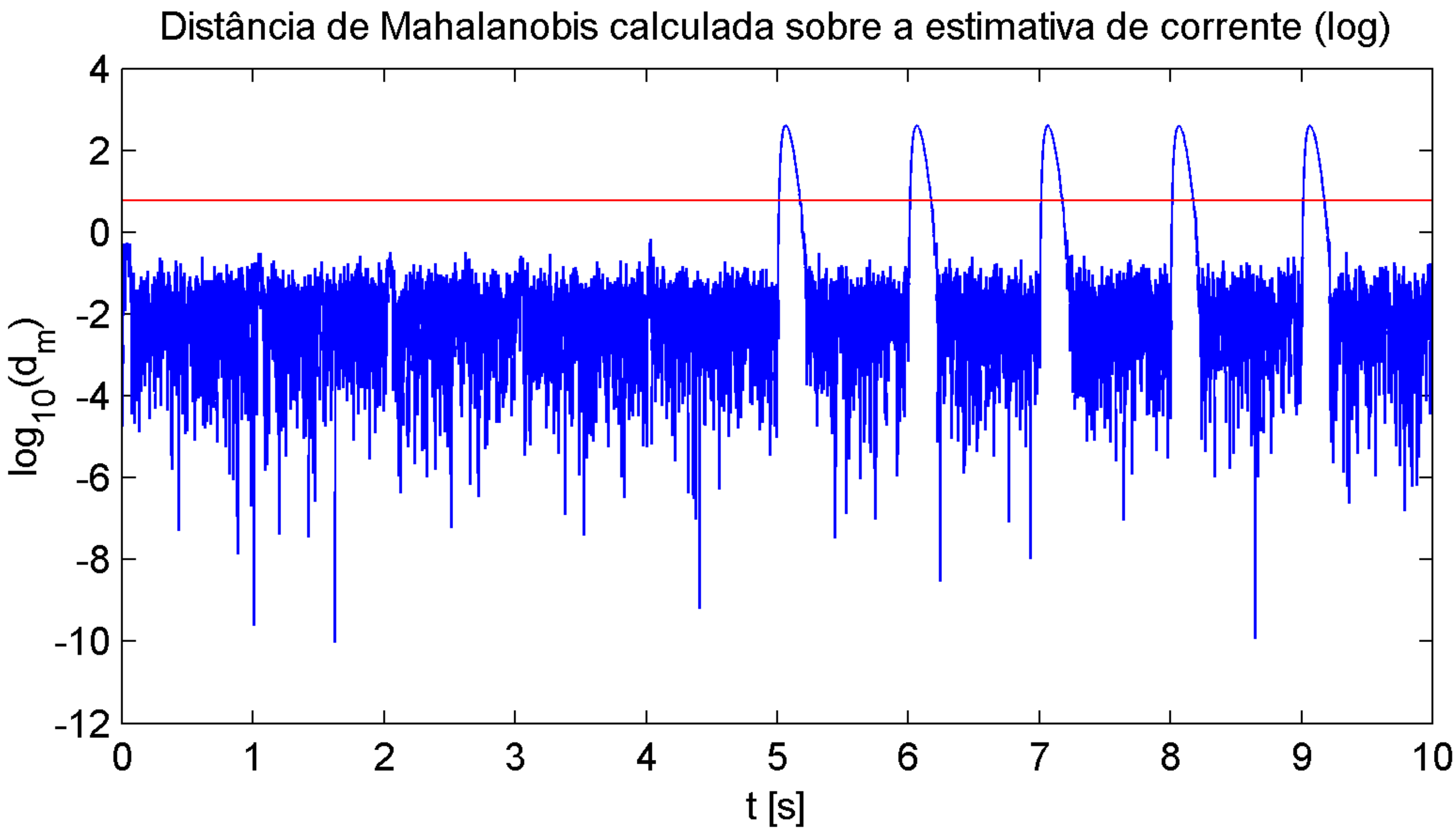
Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 5. *Detecção de falha em motor de corrente contínua*



Estimação ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 5. *Detecção de falha em motor de corrente contínua*



Estimação ótima (filtragem estocástica)

- Filtro de Kalman de regime permanente
  - Seja o seguinte modelo de um sistema linear estocástico:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \tag{73}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \tag{74}$$

com $\mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ e $\mathbf{v}(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ sendo processos gaussianos estacionários representando incertezas na evolução das variáveis de estado $\mathbf{x}(k)$ e na medição $\mathbf{y}(k)$, respectivamente.

Estimação ótima (filtragem estocástica)

- Filtro de Kalman de regime permanente
  - Estando este sistema operando em torno de uma condição nominal e seu estado estimado por um filtro de Kalman, o ganho do filtro tende a permanecer constante sendo $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ também constantes. Assim, sendo $\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(k) &= \mathbf{F}\mathbf{P}(k-1)\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \\
&= \mathbf{F}\left[(\mathbf{I} - \mathbf{K}(k-1)\mathbf{H})\,\mathbf{P}(k-1|k-2)\right]\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \\
&= \mathbf{F}\left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}(k-1|k-2)\mathbf{H}^\mathbf{T}\left(\mathbf{H}\mathbf{P}(k-1|k-2)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{H}\right)\mathbf{P}(k-1|k-2)\right]
\end{aligned}$$

Estimação ótima (filtragem estocástica)

- Filtro de Kalman de regime permanente
  - Em regime permanente, $\mathbf{P}(k-1) = \mathbf{P}(k-1|k-2)$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{F}\left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}(k-1)\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{H}\mathbf{P}(k-1)\mathbf{H}^{T} + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{H}\right)\mathbf{P}(k-1)\right]\mathbf{F}^{T} + \mathbf{Q} \quad (78)$$

e $\mathbf{P}_{\infty} = \mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1)$ que resulta em

$$\mathbf{P}_{\infty} = \mathbf{F}\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\infty}\mathbf{H}\right)\mathbf{P}_{\infty}\mathbf{F}^{T} + \mathbf{Q}. \quad (79)$$

O ganho em regime permanente do filtro é portanto dado por

$$\mathbf{K}_{\infty} = \mathbf{P}_{\infty}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{H}\mathbf{P}_{\infty}\mathbf{H}^{T} + \mathbf{R}\right)^{-1}. \quad (80)$$

Estimação sub-ótima (filtragem estocástica)

- Problema da estimação não-linear ótima
  - Seja o seguinte modelo não-linear estocástico:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{w}(k) \tag{81}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{v}(k) \tag{82}$$

  com $\mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(k))$ e $\mathbf{v}(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}(k))$ sendo processos gaussianos representando incertezas na evolução das variáveis de estado $\mathbf{x}(k)$ e na medição $\mathbf{y}(k)$, respectivamente.

Estimação sub-ótima (filtragem estocástica)

- Problema da estimação não-linear ótima
  - $\mathbf{x}(k)$ não pode ser mais considerado um processo gaussiano. Sua distribuição evolui da seguinte forma:

$$p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k) = \frac{p(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k))\,p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(1),\ldots,\mathbf{y}(k-1))}{\int p(\mathbf{y}(k)|\xi)\,p(\xi|\mathbf{y}(1),\ldots,\mathbf{y}(k-1))d\xi} \tag{83}$$

  Na prática, dificilmente pode-se obter uma solução analítica a este problema.

Estimação sub-ótima (filtragem estocástica)

- Filtro de Kalman estendido

  - Para funções $\mathbf{f}_k$ e $\mathbf{h}_k$ suficientemente suaves, a gaussianidade de $\mathbf{x}(k)$ pode ser válida por um certo período de tempo. Assim, entre medições, sua estimativa $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ é obtida por predição:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}(k-1), \mathbf{u}(k-1)) \tag{84}$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{F}(k-1)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{F}^T(k-1) + \mathbf{Q}(k) \tag{85}$$

com $\mathbf{F}(k-1) = \partial \mathbf{f}_{k-1} / \partial \hat{\mathbf{x}}(k-1)$.

Estimação sub-ótima (filtragem estocástica)

- Filtro de Kalman estendido
  - Quando medições $\mathbf{y}(k)$ são realizadas, estas são usadas para corrigir o processo de predição e obter uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}(k)$ pela relação seguinte:

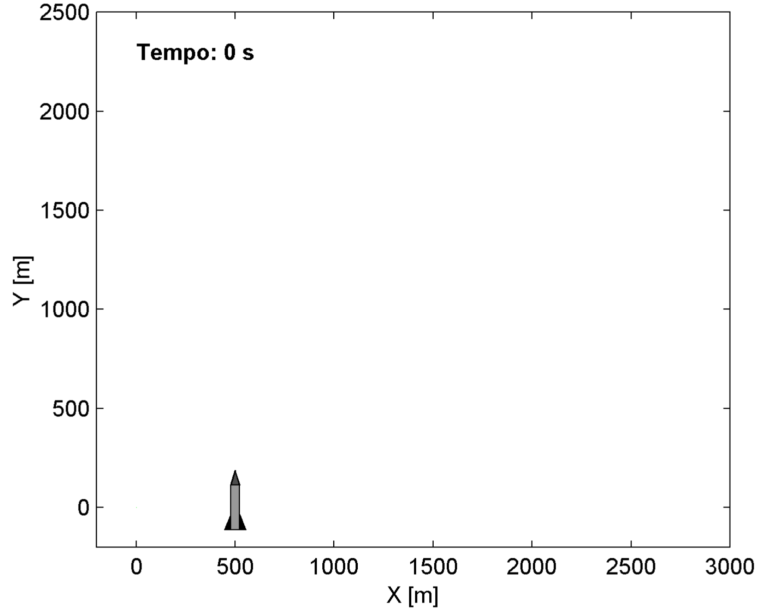
$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}(k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)\cdot(\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k-1)) && (86)\\
\mathbf{P}(k) &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k))\,\mathbf{P}(k|k-1) && (87)\\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k))\,\mathbf{P}(k|k-1)\,(\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k))^T + \mathbf{K}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{K}^T(k) && (88)
\end{aligned}
$$

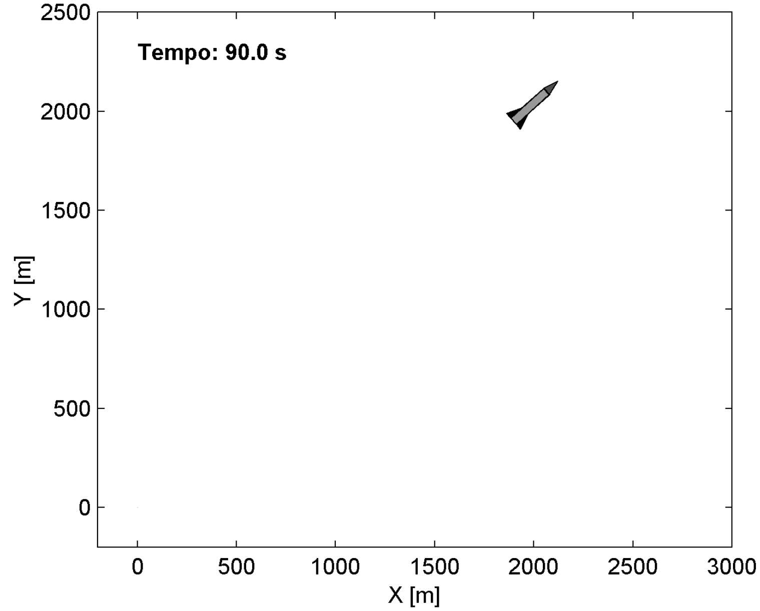
com $\mathbf{H}(k) = \partial\mathbf{h}_k/\partial\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$. O ganho de Kalman $\mathbf{K}(k)$ é dado por

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T(k)\left(\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)\right)^{-1} \qquad (89)$$

Estimação sub-ótima (filtragem estocástica)

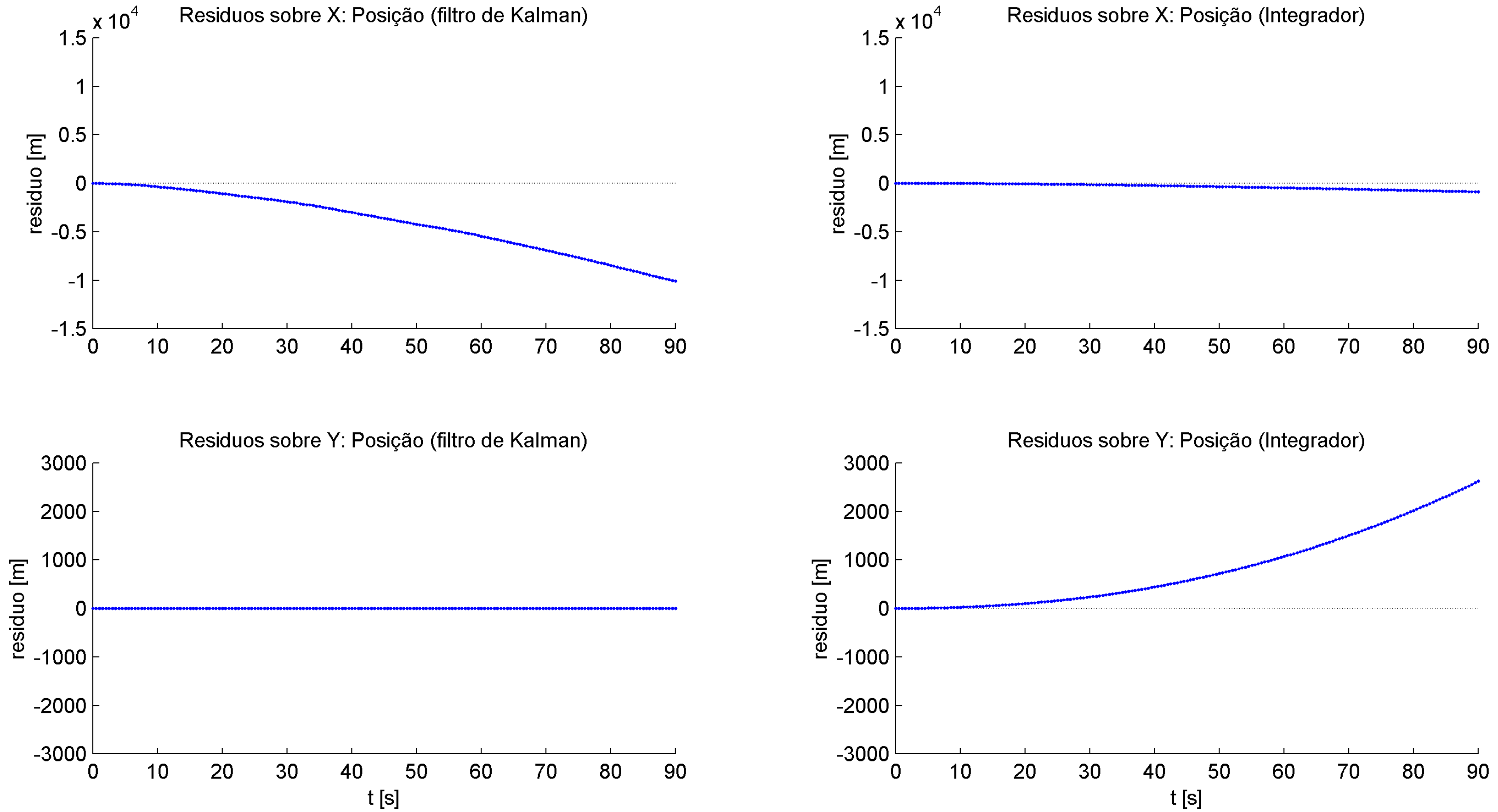
Exemplo 6. *Exemplo 4 com a central inercial alinhada com o míssil*





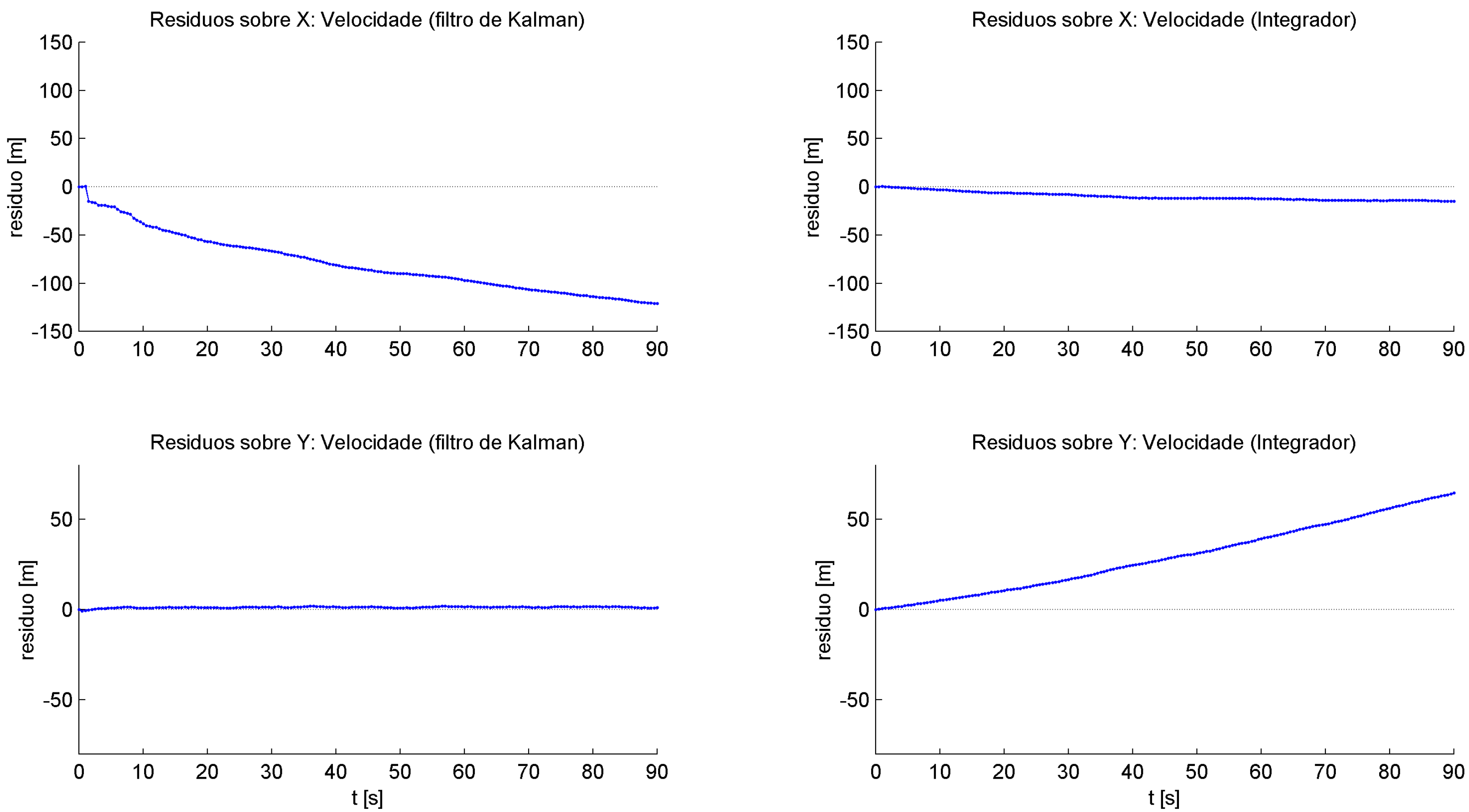
Estimação sub-ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 6. *Exemplo 4 com a central inercial alinhada com o míssil*



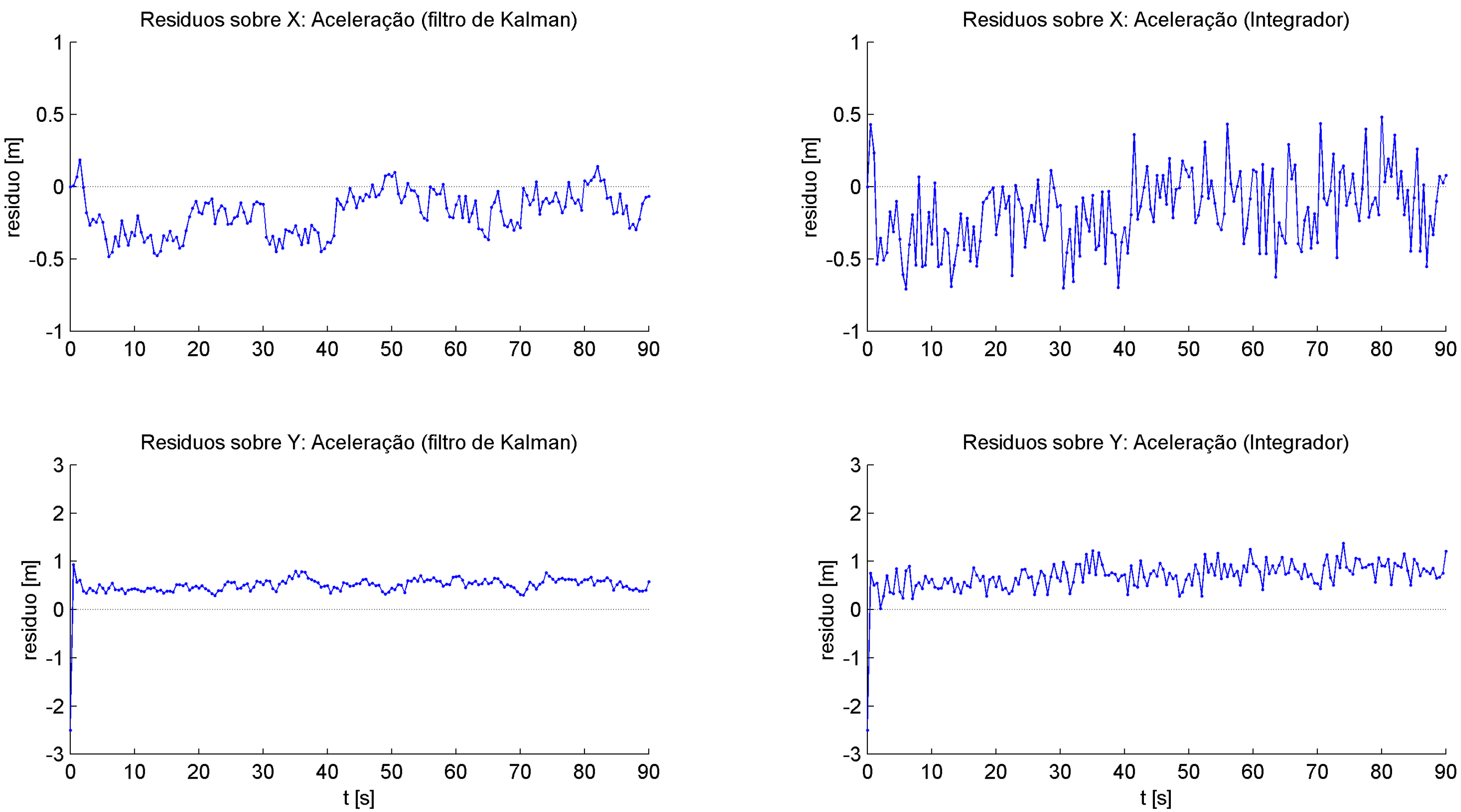
Estimação sub-ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 6. *Exemplo 4 com a central inercial alinhada com o míssil*



Estimação sub-ótima (filtragem estocástica)

Exemplo 6. *Exemplo 4 com a central inercial alinhada com o míssil*



Controle linear quadrático gaussiano (LQG)

- No controle LQG de uma planta (3)-(4), aplica-se um controlador LQ cuja lei de controle é

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{L}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{Q}_2^{-T}\mathbf{Q}_{12}^T\hat{\mathbf{x}}(k) \tag{90}$$

  com $\hat{\mathbf{x}}(k)$ sendo a estimativa de estado obtida por um filtro de Kalman.

- O caso de regulagem pode ser tratado usando as versões de regime permanente do controle LQ (*i.e.*, LQR) e do filtro de Kalman.

- Para sistemas não-lineares, o controlador usa o modelo linearizado em torno da referência enquanto que o estimador usa o modelo linearizado em torno da predição.

Bibliografia

Para a elaboração deste documento, foram consultadas as seguintes referências: [1], [2], [3], [4] e [5].

Referências

[1] A. H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, 1970.

[2] C.K. Chui and G. Chen. *Kalman filtering with real-time applications*. Springer-Verlag, 3rd edition, 1999.

[3] P. Dyer and S.R. McReynolds. *The computation and theory of optimal control*. Academic Press, 1970.

[4] K.J. Åström and B. Wittenmark. *Computer Controller Systems: theory and design*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 2nd edition, 1990.

[5] J.D. Powell G.F. Franklin and M.L. Workman. *Digital control of dynamic systems*. Addison Wesley Longman, Inc., 3rd edition, 1997.