Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília

Tópicos em Controle de Processos 2

Conceitos introdutórios

Geovany A. Borges
gaborges@ene.unb.br

Sistemas dinâmicos

- Modelos não-lineares

Um sistema dinâmico pode ser representado de forma geral como um conjunto de equações diferenciais

$$\phi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{u}) = 0 \tag{1}$$

Através de manipulações matemáticas, pode-se chegar à forma de espaço de estados não-linear

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases} \tag{2}$$

com $\mathbf{x}$ sendo denominado o vetor de estados, $\mathbf{u}$ é o vetor de entrada e $\mathbf{y}$ é o vetor de saída. $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$ são funções vetoriais. Considerando-se que o sistema possui p entradas, n estados e m saídas, tem-se

$$\dim(\mathbf{x}) = n \times 1 \qquad \dim(\mathbf{u}) = p \times 1 \qquad \dim(\mathbf{y}) = m \times 1 \quad . \tag{3}$$

Sistemas dinâmicos

Os valores de $\mathbf{x}$ para os quais se tem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$$

são denominados pontos de equilíbrio (com $\mathbf{u}$ sendo constante) ou atratores.

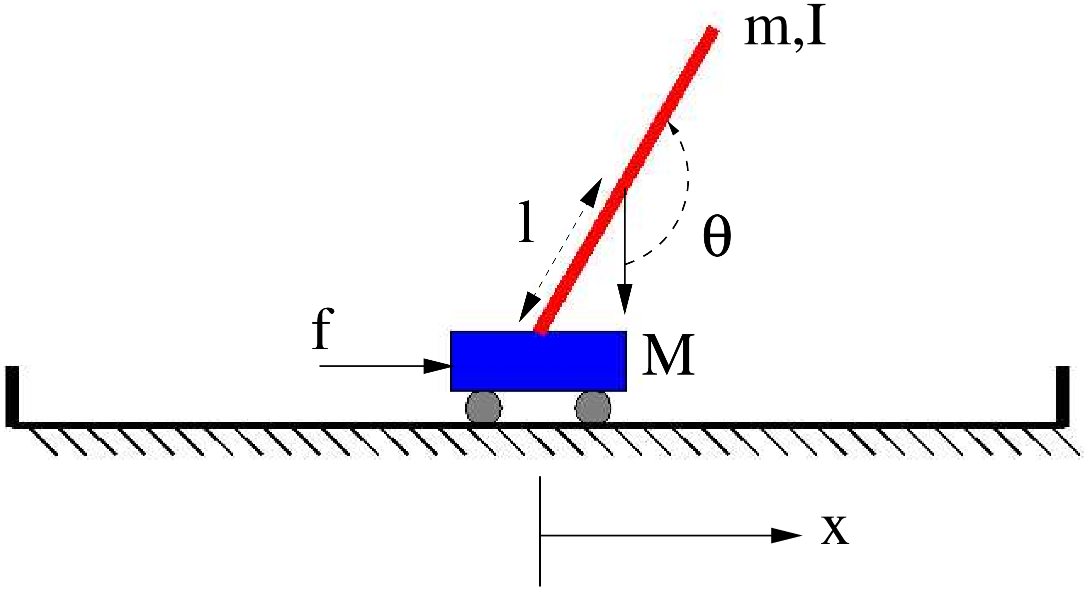
Um sistema é dito autônomo se seu modelo for do tipo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{4}$$

Um atrator $\mathbf{x}^*$ de um sistema autônomo é dito estável se, dada a condição inicial $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$, o sistema permanecer no estado $\mathbf{x}^*$. A estabilidade dos atratores é melhor descrita em [Kalil, 1996].

Sistemas dinâmicos

Exemplo 1. *Pêndulo invertido*



As equações de movimento de um pêndulo invertido conforme mostrado na figura são:

$$(M+m)\ddot{x} = f - b\dot{x} - ml\ddot{\theta}\cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) \quad (5)$$

$$(I+ml^2)\ddot{\theta} = -ml\ddot{x}\cos(\theta) - mgl\sin(\theta). \quad (6)$$

Sistemas dinâmicos

Nessas equações, tem-se:

M : Massa do carro; m : Massa da barra do pêndulo; b : Coeficiente de fricção do carro; l : distância do centro de massa do pêndulo com relação ao ponto de fixação no carro; I : momento de inércia do pêndulo; g : aceleração da gravidade; f : Força exercida para mover o sistema; x : posição do carro; θ : ângulo do pêndulo com relação à vertical.

Ao escolher como variáveis de estado $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$ e $x_4 = \dot{\theta}$, organizadas no vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, e $u = f$ sendo a entrada, obtem-se o seguinte modelo em espaço de estados:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \beta_2(\mathbf{x}, u)/\lambda \\ x_4 \\ \beta_4(\mathbf{x}, u)/\lambda \end{pmatrix}$$

Sistemas dinâmicos

com

$$
\begin{aligned}
\beta_2(\mathbf{x},u) &= m^2l^2g\sin(x_3)\cos(x_3) - (I+ml^2)bx_2 - (I+ml^2)ml\sin(x_3)x_4^2 + (I+ml^2)u;\\
\beta_4(\mathbf{x},u) &= -(M+m)mgl\sin(x_3) + mlb\cos(x_3)x_2 + m^2l^2\sin(x_3)\cos(x_3) - ml\cos(x_3)u;\\
\lambda &= (I+ml^2)(M+m) - m^2l^2\cos^2(x_3).
\end{aligned}
$$

Exercício 1. *Quais são os atratores do pêndulo invertido?*

Sistemas dinâmicos

- Modelos lineares

Com o seguinte caso particular

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} && (7) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} && (8) \end{aligned}$$

tem-se um sistema linear variante no tempo. As relações acima são para sistemas determinísticos. No caso especial de sistema linear invariante no tempo,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} && (9) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. && (10) \end{aligned}$$

Sistemas dinâmicos

No domínio de Laplace, tomando-se em conta a condição inicial $\mathbf{x}(0)$, temos:

$$\begin{aligned} sX(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}U(s) &(11)\\ Y(s) &= \mathbf{C}X(s) + \mathbf{D}U(s). &(12) \end{aligned}$$

Temos assim que $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})X(s) = \mathbf{B}U(s) + \mathbf{x}(0)$ e em conseqüência

$$Y(s) = \left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right\}U(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{13}$$

Considerando $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$,

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{14}$$

com $G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ sendo a função de transferência do sistema.
Como

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \tag{15}$$

Sistemas dinâmicos

e assim

$$G(s) = \frac{\mathbf{C} \cdot adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (16)$$

Deve-se observar que a função de transferência acima é uma matriz de dimensão $m \times p$:

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(s) & \cdots & G_{np}(s) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Onbserva-se que os pólos do sistema $G(s)$ são dados pelas raízes de $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, e independem da ordem do modelo.

Considerando um sistema SISO (Single Input Single Output) e $\mathbf{D} = 0$, a função de transferência se resume a

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_{n_b} s^{n_b} + b_{n_b - 1} s^{n_b - 1} + \cdots + b_0}{s^{n_a} + a_{n_a - 1} s^{n_a - 1} + \cdots + a_0} \quad (18)$$

Sistemas dinâmicos

com $n_a \geq n_b$ sendo as ordens dos polinômios $A(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ e $B(s) = \mathbf{C} \cdot adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$, respectivamente.

Em muitos casos, deseja-se saber o valor de regime permanente da saída $Y(s)$ quando $t \rightarrow \infty$ em resposta a uma entrada $U(s)$. Para tanto, usa-se

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{B(s)}{A(s)} U(s). \tag{19}$$

No caso especial da entrada ser uma constante, ou seja $u(t) = u_{ss}$ (e.g., problema de regulação), tem-se

$$y_{ss} = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{B(s)}{A(s)} \frac{u_{ss}}{s} = \frac{b_0}{a_0} u_{ss} \tag{20}$$

Sistemas dinâmicos

- Linearização

Na natureza, encontra-se somente processos não-lineares. No entanto, assumindo algumas hipóteses, modelos lineares podem ser obtidos. Esses modelos têm assim uma região de operação fora da qual deixam de ser válidos. Uma forma usual de obter um modelo linear local a partir de um modelo não-linear é aplicando um procedimento conhecido por *linearização*. Em torno de um ponto de operação $\bar{\mathbf{x}}$ resultante de uma entrada $\bar{\mathbf{u}}$ tem-se

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}). \tag{21}$$

Considera-se $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \delta_{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \delta_{\mathbf{u}}$ perturbações do ponto de operação, tem-se que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} + \frac{d\delta_{\mathbf{x}}}{dt} \tag{22}$$

Sistemas dinâmicos

Por outro lado,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta_{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}} + \delta_{\mathbf{u}}). \tag{23}$$

Sabe-se que a expansão em série de Taylor de $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})$ é dada por

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta_{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}} + \delta_{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + O(2) \tag{24}$$

com $O(2)$ representando os termos de ordem superior. Supondo que $O(2)$ seja desprezível, a série pode ser truncada. Assim, ao se igualar (22) e (23), obtem-se

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} + \frac{d\delta_{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \cdot (\delta_{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \cdot (\delta_{\mathbf{u}}).$$

Sistemas dinâmicos

Como a equação (21) continua válida, tem-se finalmente o modelo em espaço de estados para $\delta_{\mathbf{x}}$:

$$\frac{d\delta_{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}(t)\delta_{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(t)\delta_{\mathbf{u}},$$

com $\mathbf{A}(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$ e $\mathbf{B}(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}$. De forma semelhante, se for definindo $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \delta_{\mathbf{y}}$, com $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$, tem-se

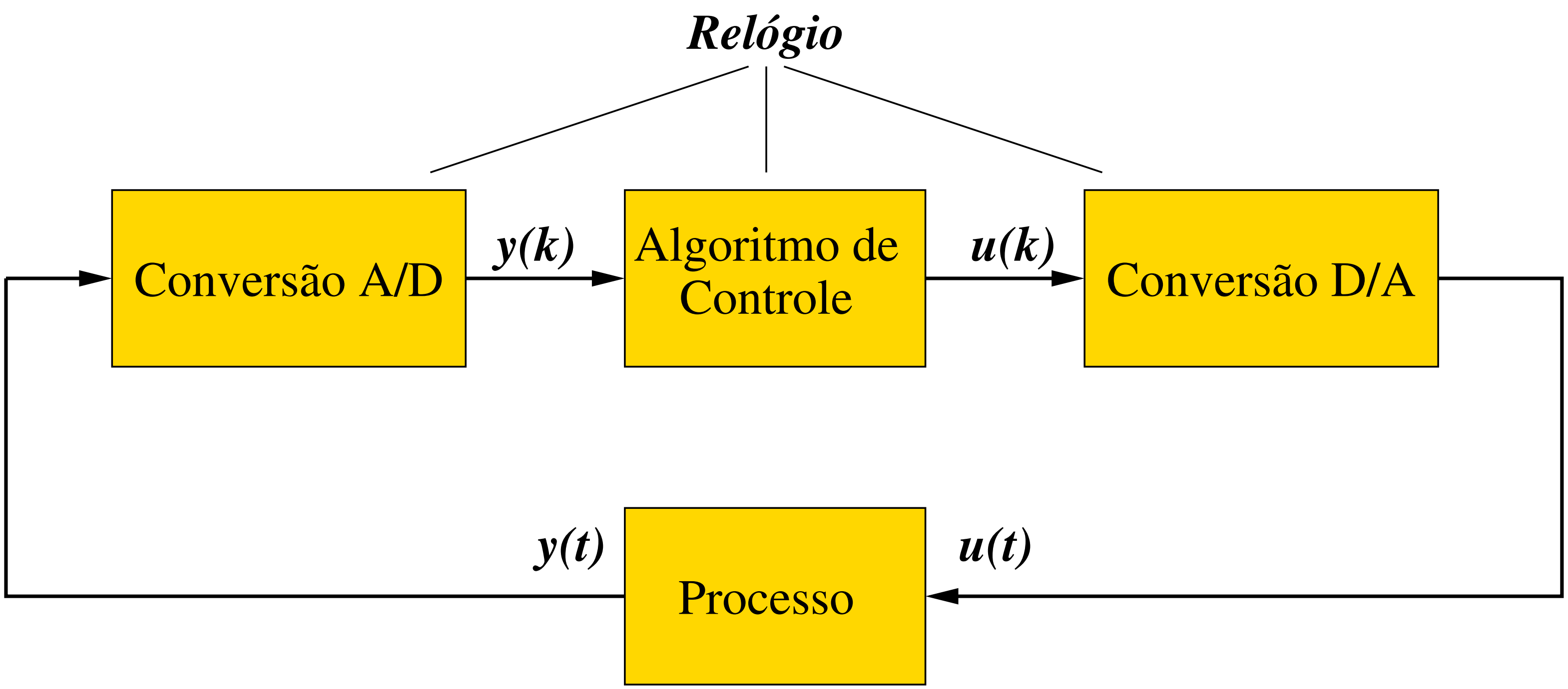
$$\frac{d\delta_{\mathbf{y}}}{dt} = \mathbf{C}(t)\delta_{\mathbf{x}} + \mathbf{D}(t)\delta_{\mathbf{u}}$$

com $\mathbf{C}(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$ e $\mathbf{D}(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}$.

Exercício 2. *Linearizar o pêndulo invertido em torno de $x = 0$ e $\theta = \pi$.*

Sistemas dinâmicos amostrados

- Diagrama genérico (amostragem ao passo T)



Sistemas dinâmicos amostrados

- Modelo do processo em espaço de estados discreto:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \end{array} \right. \tag{25}$$

No caso de sistema linear invariante no tempo,

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{array} \right. \tag{26}$$

Sistemas dinâmicos amostrados

- Obtenção do modelo discreto a partir do modelo contínuo
  - Caso espaço de estados.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{t}). \end{cases} \xrightarrow{\text{Amostragem ZOH}} \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \tag{27}$$

Relações:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} \tag{28}$$

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\,d\tau \tag{29}$$

com

$$e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I} + \mathbf{A}T + \frac{\mathbf{A}^2T^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3T^3}{3!} + \dots \tag{30}$$

Sistemas dinâmicos amostrados

- Obtenção do modelo discreto a partir do modelo contínuo
  - Caso função de transferência.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \xrightarrow{\text{Amostragem ZOH}} G(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \tag{31}$$

Relações (resposta ao pulso unitário):

$$G(z) = \mathcal{Z}\{(1 - e^{-Ts})\frac{G(s)}{s}\}, \tag{32}$$

$$= \mathcal{Z}\{(1 - e^{-Ts})\} \cdot \mathcal{Z}\{\frac{G(s)}{s}\}, \tag{33}$$

$$= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\{\frac{G(s)}{s}\}. \tag{34}$$

Sistemas dinâmicos amostrados

- Operador q:

Operador q (resp. q^{-1}) significa operador de avanço (resp. atraso), com o qual pode-se escrever a relação entrada-saída por meio de uma equação de diferenças:

$$\mathbf{y}(k) = \frac{B^*(q)}{A^*(q)}\mathbf{u}(k), \tag{35}$$

com

$$B^*(q) = b_{n_b}q^{n_b} + b_{n_b-1}q^{n_b-1} + \cdots + b_0 \tag{36}$$
$$A^*(q) = a_{n_a}q^{n_a} + a_{n_a-1}q^{n_a-1} + \cdots + 1. \tag{37}$$

Observa-se que a equação de diferença está escrita em avanço com relação ao instante k.

Sistemas dinâmicos amostrados

O equivalente em atraso, é obtido fazendo

$$\mathbf{y}(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}\mathbf{u}(k), \tag{38}$$

onde fez-se $A(q^{-1}) = A^*(q) \cdot q^{-n_a}$ e $B(q^{-1}) = B^*(q) \cdot q^{-n_a}$.

Embora q e z representem um avanço e por conta disso são muitas vezes usados como equivalentemente, não se deve confundir o operador q com o número complexo z.

Como no caso contínuo, os pólos do modelo discreto são as raízes de $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Um pólo no tempo contínuo s e o seu correspondente z no tempo discreto são ligados por $z = \exp(pT)$.

Discussão 1. *Como pólos e zeros são do domínio* s *são relacionados aos do domínio* z*.*

Projeto de controle por computador

- Abordagem 1: Projeto no domínio discreto.
  - Obtenção do modelo discreto:
    - pelo modelo contínuo;
    - por um experimento de identificação.
  - Projeto.
  - Implementação direta da lei de controle $\mathbf{u}(k)$.

Projeto de controle por computador

- Abordagem 2: Projeto no domínio contínuo.
  - Obtenção do modelo contínuo:
    - por uma modelagem física;
    - por um experimento de identificação.
  - Projeto.
  - Obtenção do equivalente discreto. No caso linear:

Método	**Aproximação**
Regra em avanço (Euler)	$s \leftarrow \frac{z-1}{T}$
Regra em atraso	$s \leftarrow \frac{z-1}{Tz}$
Regra trapezoidal	$s \leftarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

Bibliografia

Referências

[Kalil, 1996] Kalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 2nd edition.