167657 - Controle para Automação
Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília

Redes de Petri

Geovany A. Borges
gaborges@ene.unb.br

Tópicos já abordados em sala de aula

- Introdução
- Grafo da RdP Lugar-Transição (LT)
- Exemplos de modelamendo com RdP
  - Sistema de produção com um robô manipulador e três esteiras
  - Problema do jantar dos filósofos

Relações básicas modeladas por RdP

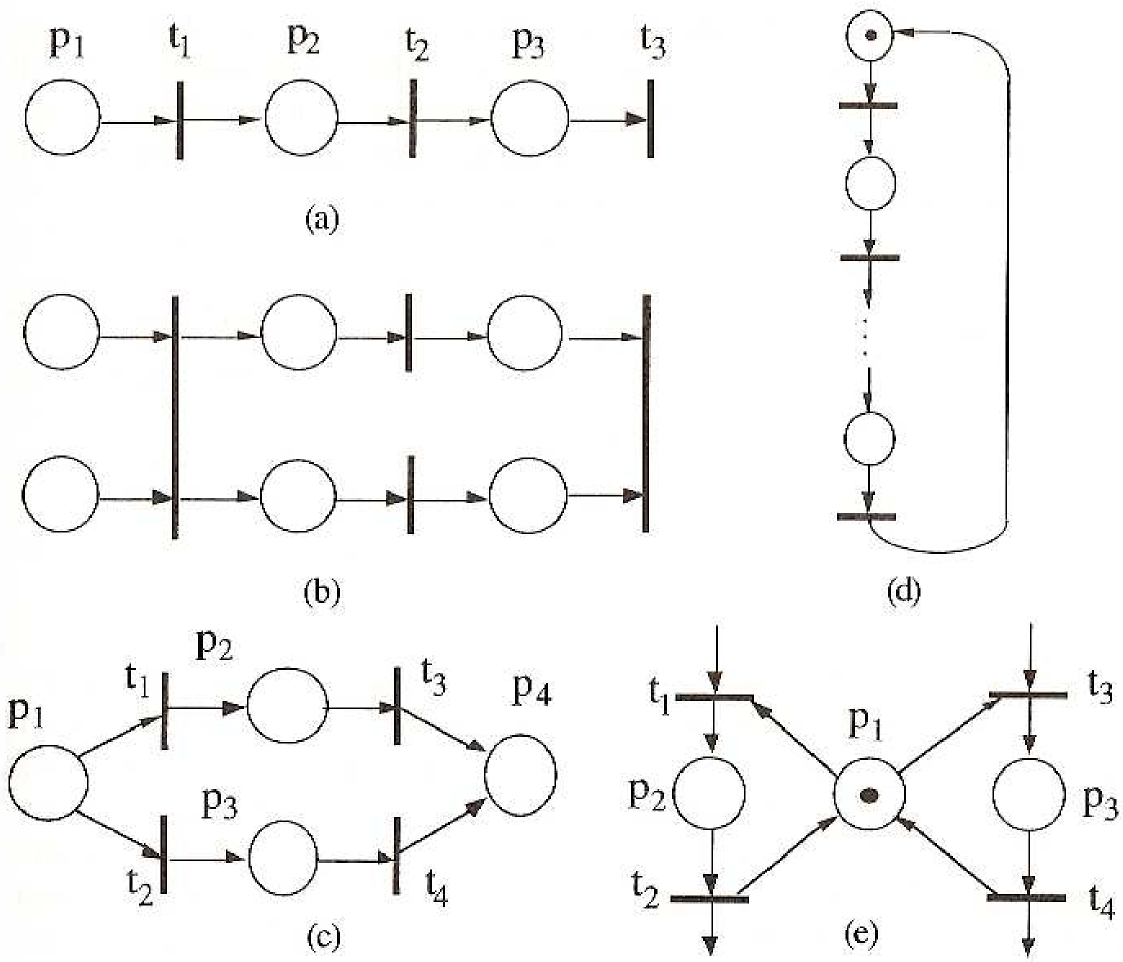


Figure 5.11. Examples of Basic Relations (a) Sequential (b) Concurrent (c) Conflicting (d) Cyclic (e) Mutually exclusive.

Módulos básicos para manufatura

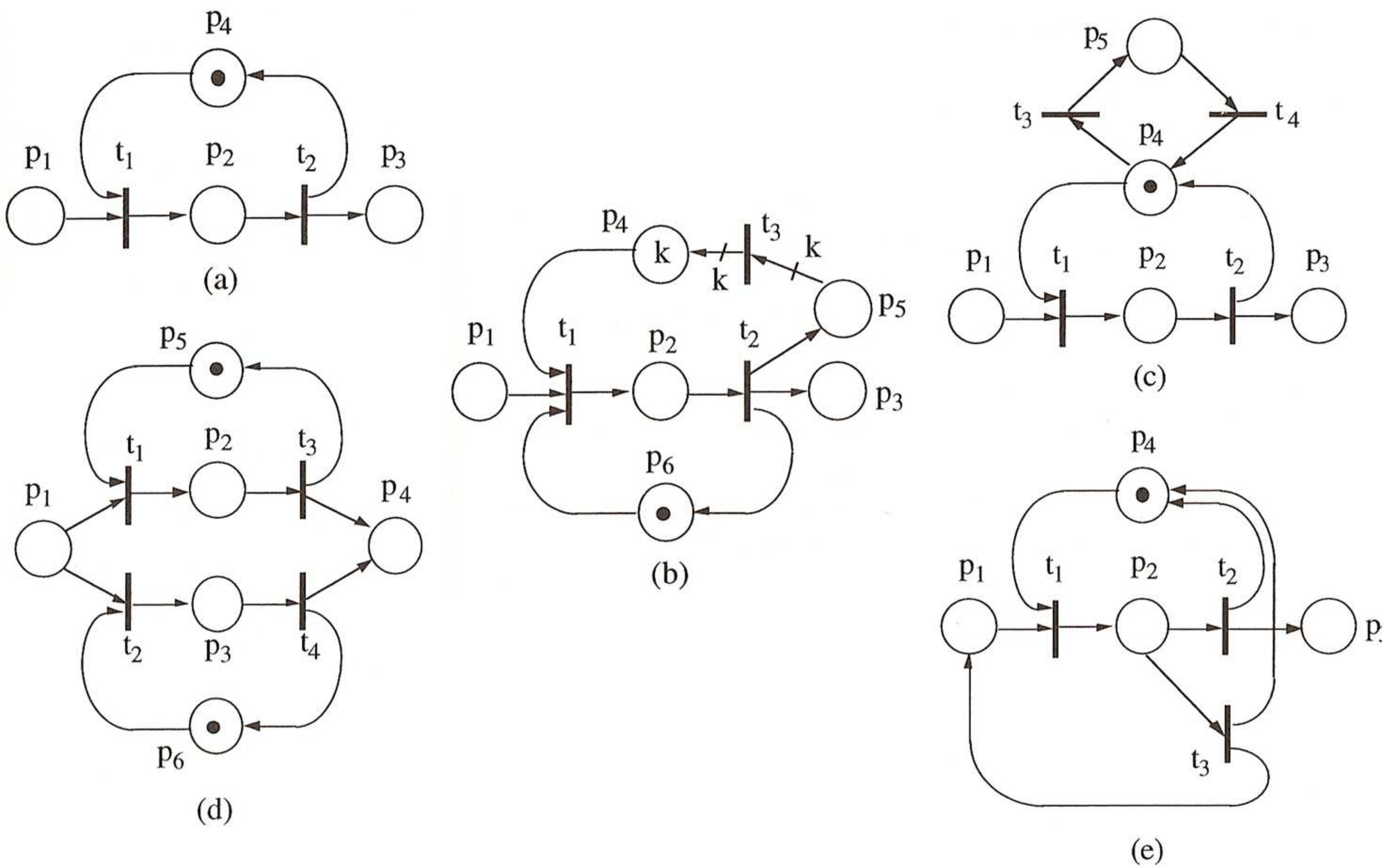


Figure 5.14. Commonly used Petri net modules for flexible manufacturing (a) Resource/operation, (b) Periodically-maintained resource/operation, (c) Fault-prone resource/operation, (d) Priority, and (e) Rework

Módulos básicos para manufatura

- Exercício: usando uma RdP LT, modele o seguinte sistema de produção:
  - Dispõe-se de três máquinas M_1, M_2 e M_3 e dois operadores O_1 e O_2 para operá-las;
  - O_1 trabalha apenas com uma máquina por vez, podendo ser M_1 ou M_2;
  - O_2 trabalha apenas com uma máquina por vez, podendo ser M_1 ou M_3;
  - Todo produto é primeiro processado em M_1, e em seguida por M_2 ou M_3;
  - Cada máquina pode processar apenas um produto por vez;
  - Inicialmente as três máquinas estão paradas, assim como os operadores estão disponíveis.

- Exercício: reconsidere o modelo do exercício anterior considerando que cada máquina pode processar K produtos por vez.

Modelos em espaço de estados

- Sendo uma RdP com n lugares e m transições, pode-se mostrar que, após o disparo de uma transição t_j, o número de fichas no lugar p_i le alterado conforme

$$\begin{aligned} x_{k+1}(p_1) &= x_k(p_1) + \Delta_j(i) \\ \Delta_j(i) &= w(t_j, p_i) - w(p_i, t_j) \end{aligned}$$

  em que

  - $w(t_j, p_i)$: peso do arco conectando t_j a p_i , que corresponde ao número de fichas colocadas em p_i após o disparo de t_j;
  - $w(p_i, t_j)$: peso do arco conectando p_i a t_j , que corresponde ao número de fichas retiradas de p_i após o disparo de t_j.

- Considerando o vetor de marcações

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k(p_1) & x_k(p_2) & \cdots & x_k(p_n) \end{bmatrix}$$

o modelo de evolução pode ser estendido resultando em

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k \mathbf{A}$$

com

$$\mathbf{u}_k = \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

em que o elemento 1 está colocado na j-ésima posição do vetor $\mathbf{u}_k$. A matriz $\mathbf{A}$ é de dimensão $m \times n$ sendo dada por

$$\mathbf{A} = \{a_{ji}\} = \{w(t_j, p_i) - w(p_i, t_j)\}.$$

Modelos de Filas com RdP

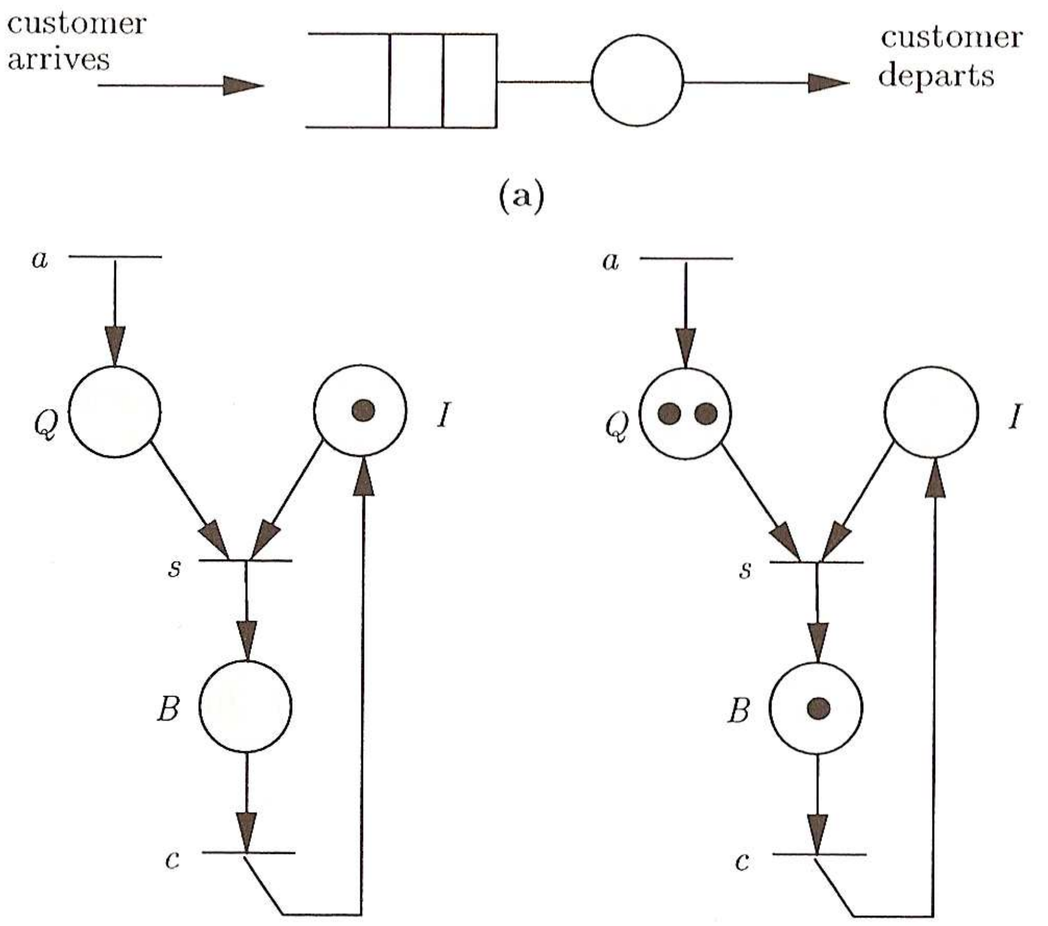


Figura 1: Q: Fila de entrada; B: Em processamento; I: Máquina disponível.

Modelos de Filas com RdP

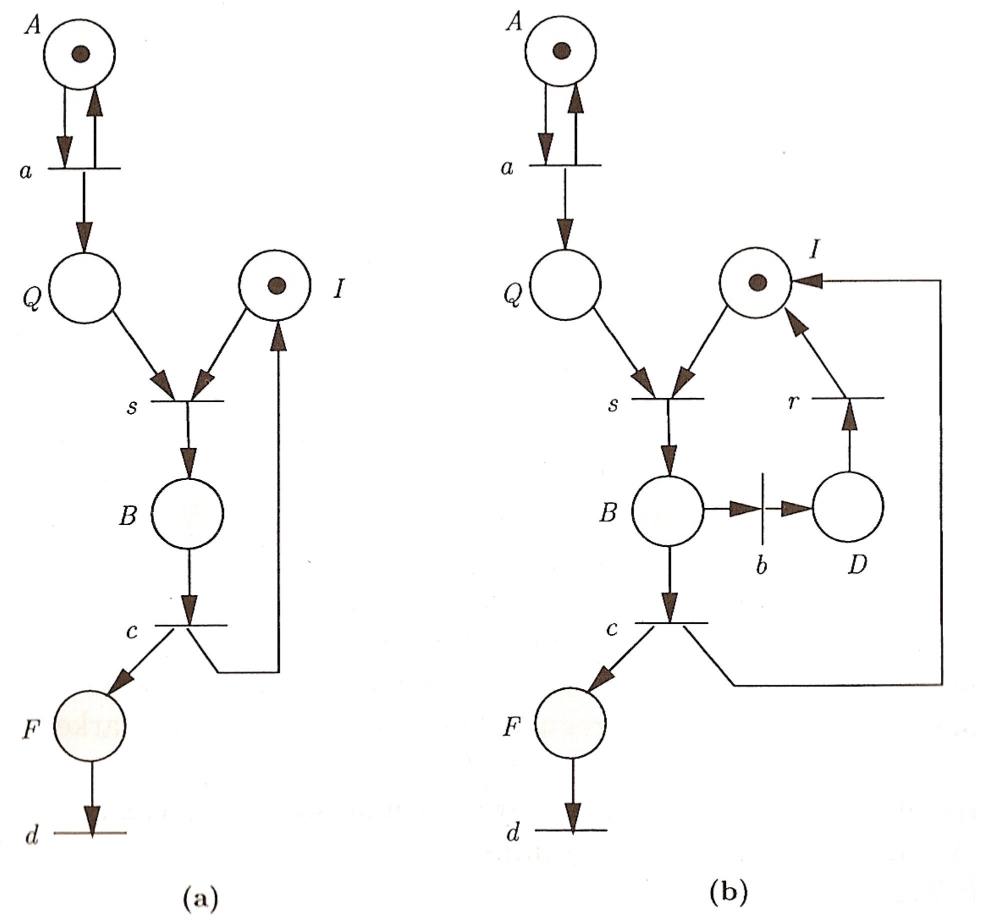


Figura 2: Q: Fila de entrada; B: Em processamento; I: Máquina disponível; F: Produtos concluídos; D: Quebra da máquina.

Propriedades de Redes de Petri

- *Limitabilidade*: o crescimento ilimitado de algumas marcas indica instabilidade no sistema.

  - Definição: um lugar p_i é dito *k*-limitado (ou *k*-seguro) se, a partir de uma marcação inicial $\mathbf{x}_0$, $x(p_i) \leq k$ para todos os estados alcançáveis de $\mathbf{x}_0$.
  - Se $k = 1$, diz-se que o lugar é seguro.
  - Se todos os lugares de yma RdP são k-limitados, então a rede é dita limitada.

- Exercício: verifique as RdP das Figuras 1 e 2.

Propriedades de Redes de Petri

- *Coberturabilidade*: relacionado à possilidade de disparar uma determinada transição t_j. Considerando-se

$$\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} e(p_1) & e(p_2) & \cdots & e(p_n) \end{bmatrix}$$

  uma marcação em que cada lugar possui **ao menos** o número mínimo de fichas que devem estar presentes em cada lugar p_i de modo a garantir o disparo de t_j. Naturalmente $e(p_i) \geq w(p_i, t_j)$. Então, um determinado estado $\mathbf{x}$ alcançável a partir de $\mathbf{x}_0$ é dito cobrir $\mathbf{e}_j$ se $x(p_i) \geq e(p_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

- *Dominância*: diz-se que uma marcação $\mathbf{x}$ domina a marcação $\mathbf{y}$ se amas as condições abaixo ocorrem

  - $x(p_i) \geq y(p_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$;
  - $x(p_i) > y(p_i)$ para pelo menos um $i = 1, \ldots, n$.

  A dominância é representada por $\mathbf{x} >_d \mathbf{y}$.

Propriedades de Redes de Petri

- *Conservabilidade*:
  - Em alguns casos as fichas podem corresponder a recursos, em vez de siginificarem apenas que um determinado lugar está ativo. Portanto, nestes casos as fichas não podem ser perdidas ou ter o número de recursos alterado, pelo menos para um determinado subconjunto de lugares.
  - Definição: uma RdP é dita conservativa com relação ao vetor de pesos

$$\boldsymbol{\gamma} = \left[\begin{array}{cccc} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{array} \right] \neq \mathbf{0}$$

se

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x(p_i) = \alpha.$$

com α sendo uma constante.

Propriedades de Redes de Petri

- Exercício: a RdP

$$\begin{aligned} P &= \{p_1, p_2\}, \\ T &= \{t_1\}, A\{(p_1, t_1), (t_1, p_2)\}, \\ w(p_1, t_1) &= 1 \\ w(t_1, p_2) &= 2 \end{aligned}$$

é conservativa com relação a algum $\boldsymbol{\gamma}$?

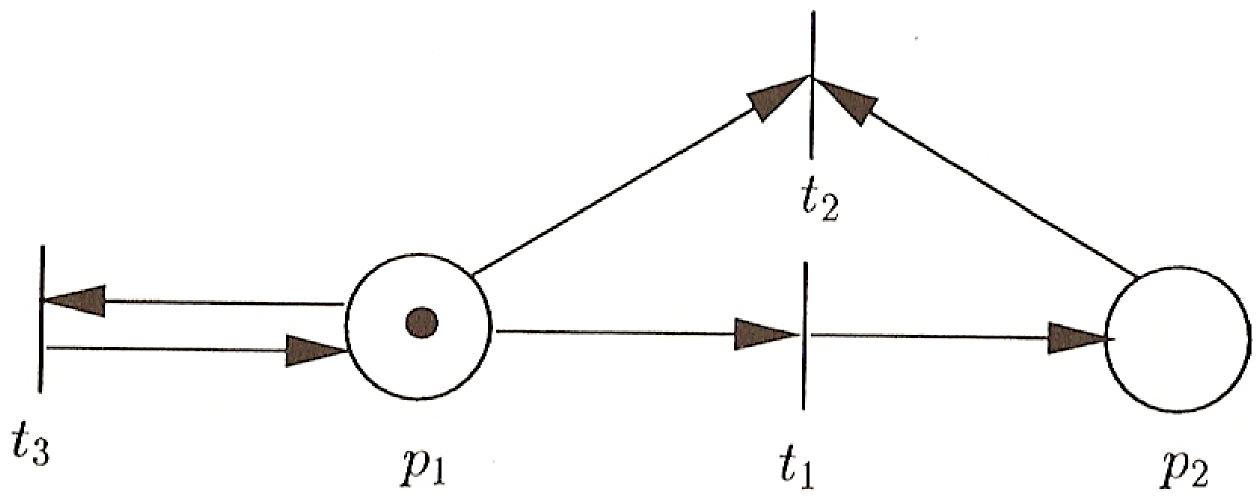
Propriedades de Redes de Petri

- *Vivacidade*: uma RdP é dita viva se, para uma marcação inicial $\mathbf{x}_0$, existe uma seqüência $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, , tal que toda transição t_j pode disparar pelo menos uma vez. Mais especificamente, para uma determinada transição t_j tem-se a seguinte classificação:
  - Morta (ou $L0$-viva): t_j nunca pode disparar a partir de $\mathbf{x}_0$;
  - $L1$-viva: existe alguma seqüência de disparos em que t_j dispara pelo menos uma vez a partir de $\mathbf{x}_0$;
  - $L2$-viva: existe alguma seqüência de disparos em que t_j dispara pelo menos k vezes a partir de $\mathbf{x}_0$;
  - $L3$-viva: existe alguma seqüência de disparos em que t_j aparece infinitas vezes na seqüência;
  - Viva (ou $L4$-viva): a transição t_j é $L1$-viva também para todos os estados alcançáveis a partir de $\mathbf{x}_0$.

- *Persistência*: Uma RdP é dita persistente se, no caso de haver duas ou mais transições habilitadas, o disparo de uma não desabilita as outras.

Propriedades de Redes de Petri

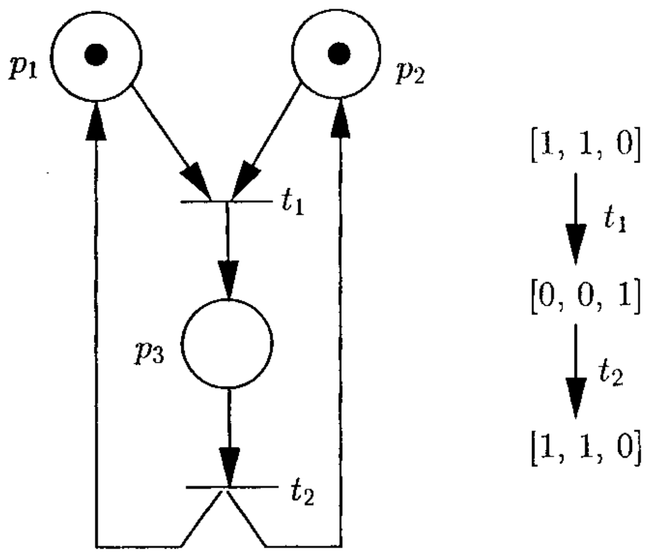
- Exemplo: vivacidade e persistência das transições da RdP abaixo



Árvore de alcançabilidade

- A árvore de alcançabilidade é um grafo formado por nós representando marcações da RdP e os arcos representando transições. Ela ilustra todosos possíveis estados que podem ser **alcançados** ou **cobertos** a partir de $\mathbf{x}_0$.

- Exemplo: no caso abaixo, a construção da árvore pára em [1,1,0] pois este estado se repete a partir de [1,1,0].



Árvore de alcançabilidade

- Exemplo: no caso abaixo, a construção da árvore pára em [1,0,2,0] que domina [1,0,1,0], e [0,0,2,1] e [0,0,1,1] são estados terminais.

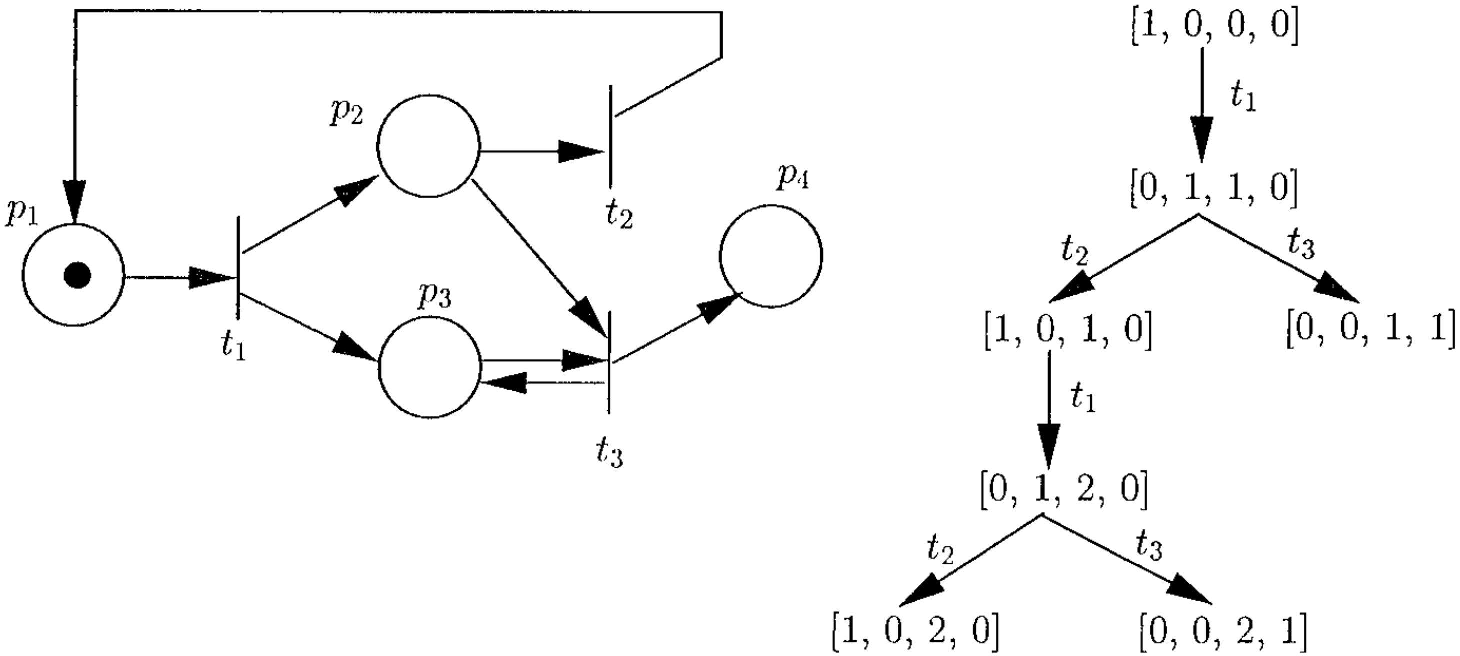


Figura 3: RdP ilustrando estados terminais e cobertos em uma árvore de alcançabilidade

Árvore de cobertura

- A árvore de cobertura é uma representação em tamanho finito da árvore de alcançabilidade.

- Terminologia:

  - Nó raiz: formado pelo estado $\mathbf{x}_0$;
  - Nó terminal: nó para o qual nenhuma transição está habilitada;
  - Nó duplicado: é um nó que já foi representado em algum ramo da árvore;
  - Nó dominado: para um mesmo ramo, diz-se que $\mathbf{y}$ é dominado por $\mathbf{x}$ se $\mathbf{x} >_d \mathbf{y}$;
  - Símbolo ω: usado para representar lugares não-limitados (infinito), tal que $\omega + k = \omega$. Isto acontece se, para um mesmo ramo, existir um estado $\mathbf{x} >_d \mathbf{y}$, com $\mathbf{y}$ estado em algum nível acima de $\mathbf{x}$. Neste caso, para todo lugar que $x(p_i) > y(p_i)$, substitui-se seu valor por ω. Por exemplo, para a Figura 3, como $[1, 0, 1, 0] >_d [1, 0, 0, 0]$, então na construção da árvore de cobertura $[1, 0, 1, 0]$ seria substituído por $[1, 0, \omega, 0]$.

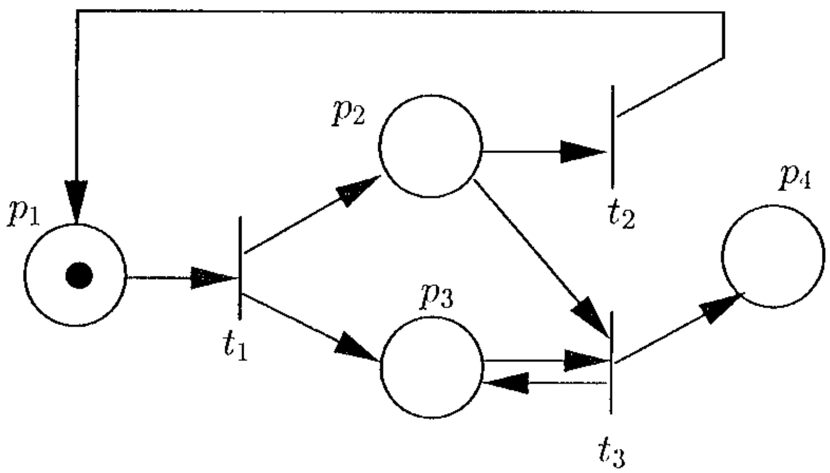
Árvore de cobertura

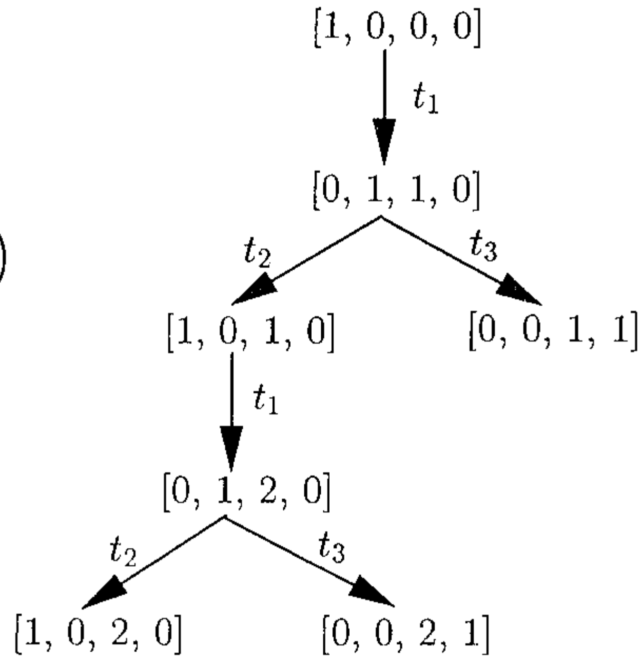
- Algoritmo de construção da árvore de cobertura:

I. Inicialize a árvore com o nó $\mathbf{x}_0$;
II. Determine o primeiro nível da árvore que será formado por nós com todos os estados $\mathbf{x}$ decorrentes do disparo de cada transição habilitada em $\mathbf{x}_0$.
III. Para cada nó $\mathbf{x}$, avalie as transições habilitadas e os novos estados $\mathbf{x}'$ decorrentes de seu disparo:
   I. Se não existir transição habilitada, então $\mathbf{x}$ é um nó terminal;
   II. Se existir um estado $\mathbf{y}$ no mesmo ramo conectando $\mathbf{x}_0$ (inclusive) a $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x}' >_d \mathbf{y}$, então faça $x'(p_i) = \omega$ para todo p_i tal que $x'(p_i) > y(p_i)$.
IV. Avance para a novo nível das árvore e volte para o passo anterior até que todos os nós obtidos sejam terminais ou duplicados.

Árvore de cobertura

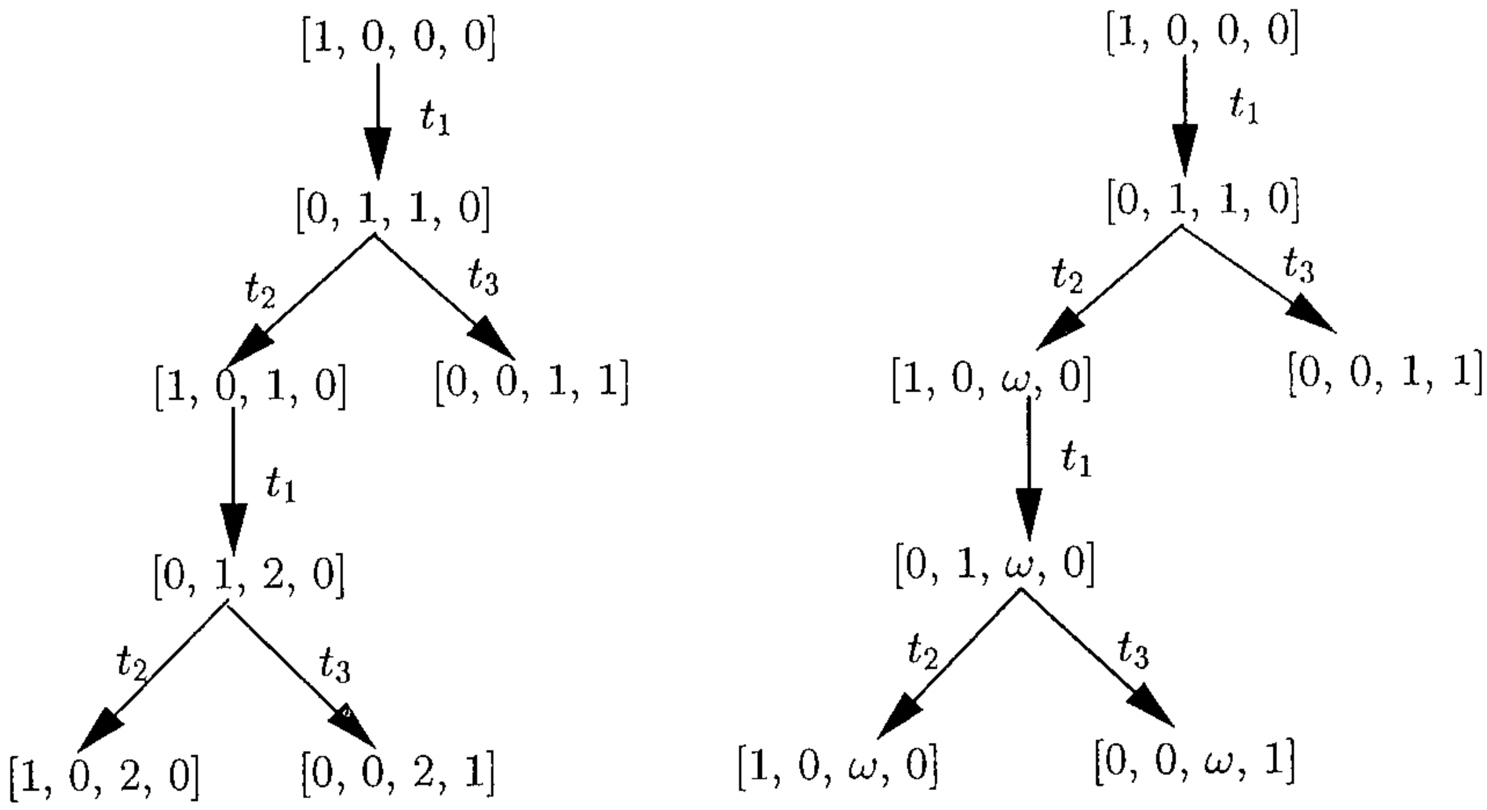
- Exemplo: construção da árvore de cobertura para a RdP abaixo:





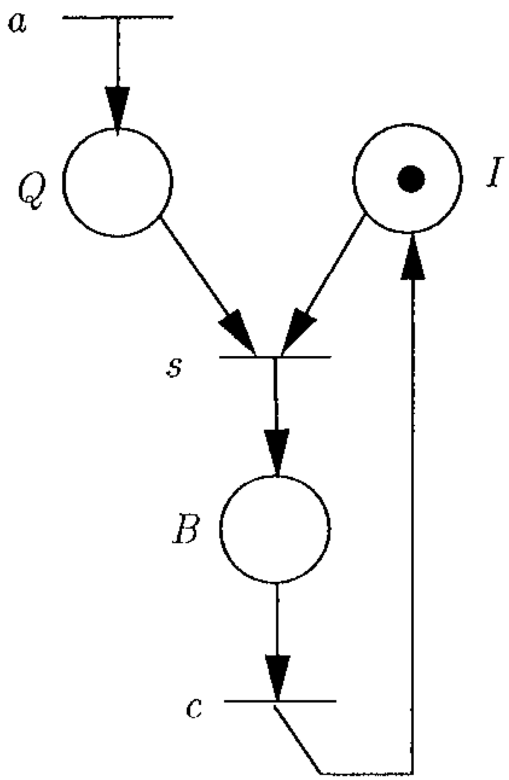
Árvore de cobertura

Solução:



Árvore de cobertura

- Exercício: construa a árvore de cobertura para a RdP abaixo:

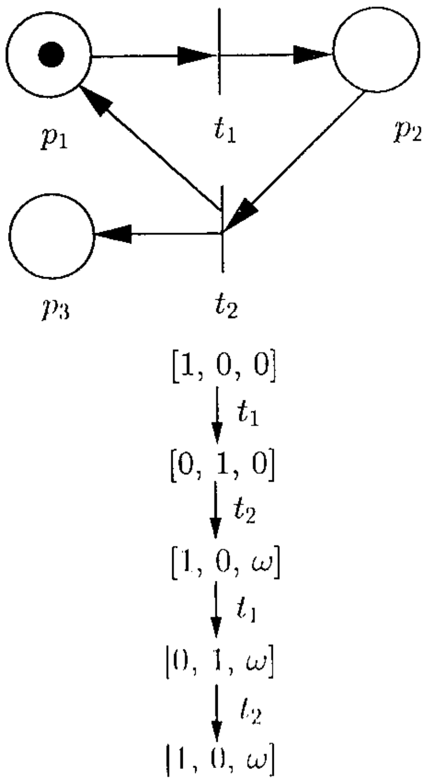


Árvore de cobertura

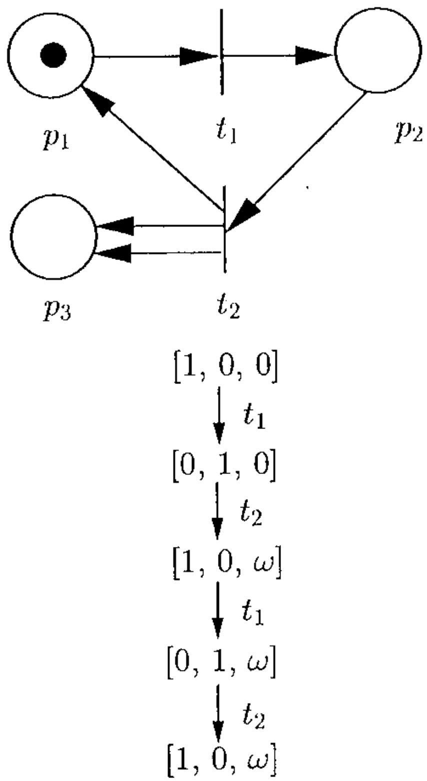
- Observações:
  - Se ω aparecer em algum lugar p_i da árvore de cobertura, então aquele lugar é não limitado;
  - Se ω não aparecer associado ao lugar p_i , então é possível determinar o limite superior de fichas para aquele lugar;
  - Se ω não aparecer em nenhum lugar p_i , então o espaço de estados modelado do SED é finito e a árvore de cobertura é igual à alvore de alcançabilidade;
  - A presença de ω em algum lugar da árvore de cobertura significa que existem laços no modelo. Isto corresponde à possibilidade de repetição infinitas vezes de uma determinada seqüência de eventos;
  - Se for observada a presença de ω em algum lugar p_i na árvore de cobertura, isto significa que, se existir um $\boldsymbol{\gamma}$ para o qual o sistema é conservativo, então $\gamma_i = 0$.
  - A presença de ω em algum lugar da árvore de cobertura significa que existe um conjunto infinito de estados representado pelo mesmo nó da árvore. Entretant, isto implica em perda de informação pois não se pode determinar que estados são esses;

Árvore de cobertura

- Exemplo: perda de informação pela árvore de cobertura



(a)



(b)

Solução algébrica para conservabilidade

Considere o modelo em espaço de estados

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k \mathbf{A}$$

Partindo de $\mathbf{x}_0$, verifica-se que

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0 \mathbf{A} \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1 \mathbf{A} = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0)\mathbf{A} \\
&\vdots \\
\mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{u}_k\right] \mathbf{A}
\end{aligned}$$

com $\mathbf{x}$ sendo um estado alcançável a partir de $\mathbf{x}_0$.

Solução algébrica para conservabilidade

Definindo $\mathbf{v} = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{u}_k\right]$, esta variável representa o número de disparos de cada transição desde $\mathbf{x}_0$, mas não permite determinar a seqüência de eventos. Uma forma de determinar uma fórmula geral de $\boldsymbol{\gamma}$ para a qual o a RdP é consevativa consiste em resolver

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}^T = \mathbf{0}.$$

Este resultado pode ser verificado a partir de

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}\mathbf{A} \\
\mathbf{x}\boldsymbol{\gamma}^T &= \mathbf{x}_0\boldsymbol{\gamma}^T + \mathbf{v}\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}^T \\
&= \mathbf{x}_0\boldsymbol{\gamma}^T \\
\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x(p_i) &= \mathbf{x}_0\boldsymbol{\gamma}^T = \text{constante} \neq 0.
\end{aligned}$$

Referências