

167037 Eletromagnetismo 1

Franklin da Costa Silva fcsilva@ene.unb.br

Aula 8

Objetivos :
Exercícios

Referência Bibliográfica:

-Eletromagnetismo para Engenheiros com Aplicações, Clayton R. Paul,, - LTC, 2006.

1) Dados dois vetores $\vec{A} = 2\hat{x} - 5\hat{y} - 4\hat{z}$ e $\vec{B} = 3\hat{x} + 5\hat{y} + 2\hat{z}$ onde $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ são vetores unitários, determine em graus o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

1) Dados dois vetores $\vec{A} = 2\hat{x} - 5\hat{y} - 4\hat{z}$ e $\vec{B} = 3\hat{x} + 5\hat{y} + 2\hat{z}$ onde $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ são vetores unitários, determine em graus o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

$$\vec{A} = 2\hat{x} - 5\hat{y} - 4\hat{z} \text{ e } \vec{B} = 3\hat{x} + 5\hat{y} + 2\hat{z}$$

Sendo o produto escalar dado por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha = -27 = \sqrt{45} \sqrt{38} \cos \alpha$$

$$\alpha = \arccos(-0,653) = 130,8^\circ$$

2) As superfícies esféricas $r = 2, 4$ e 6 m possuem densidades superficiais de cargas iguais a $100 \mu\text{C}/\text{m}^2$, $-30 \mu\text{C}/\text{m}^2$ e $6 \mu\text{C}/\text{m}^2$, respectivamente. Determine o módulo de $\vec{D}$, isto é, o módulo da densidade de fluxo elétrico para $r = 3$ m.

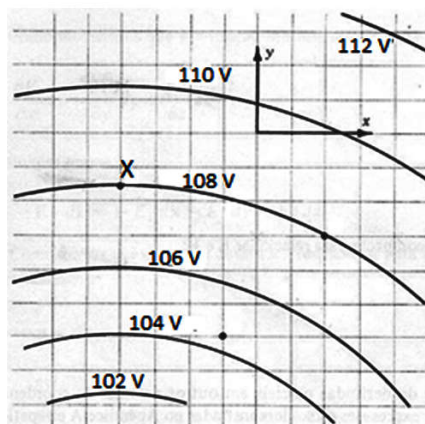
2) As superfícies esféricas $r = 2, 4$ e 6 m possuem densidades superficiais de cargas iguais a $100 \mu\text{C}/\text{m}^2$, $-30 \mu\text{C}/\text{m}^2$ e $6 \mu\text{C}/\text{m}^2$, respectivamente. Determine o módulo de $\vec{D}$, isto é, o módulo da densidade de fluxo elétrico para $r = 3$ m.

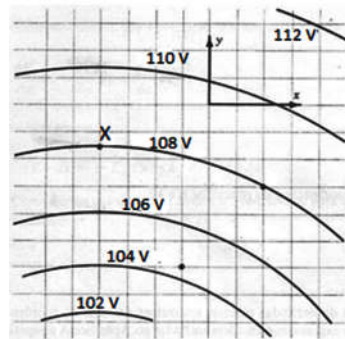
Da lei de Gauss, para $r = 3$ m, a única superfície envolvida é para $r = 2$, sendo a quantidade de cargas ($100 \mu\text{C}/\text{m}^2$)

$$Q = 4\pi 2^2 100 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$D = \frac{4\pi 2^2 100 \times 10^{-6}}{4\pi 3^2} = 44,44 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

3) A porção de um potencial bidimensional é mostrado na figura ao lado. A rede de linhas está espaçada de 1 milímetro. Determine $\vec{E}$ em coordenadas cartesianas no ponto X.





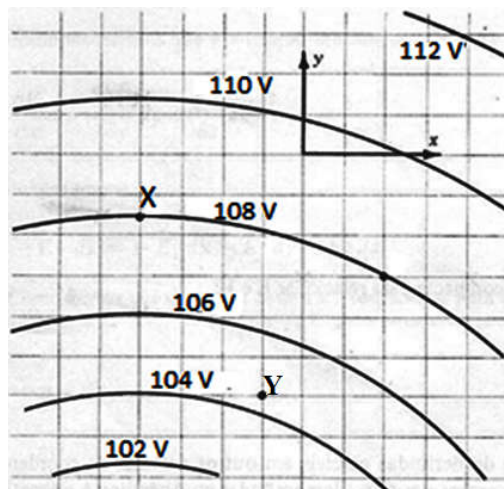
$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\bar{\mathbf{E}} \cong -\frac{108 - 108}{0,004} \hat{x} - \frac{109,7 - 106}{0,005} \hat{y}$$

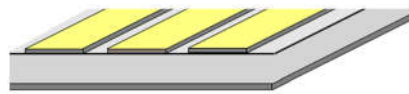
$$\bar{\mathbf{E}} \cong -740 \hat{y} \quad V/m$$

Valores aproximados

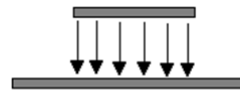
E no ponto Y?



4) A figura (a) ilustra linhas de transmissão formadas por fitas condutoras sobre um plano de terra condutor. Se a largura de cada fita for de 0,4 cm e a separação entre as fitas e o plano de terra for de 2 mm, determine a permissividade elétrica em F/m para que a capacitância de 10 cm de cada fita com relação ao plano de terra seja de 1,5 nF. Considere o campo elétrico confinado como ilustra a figura (b), onde a capacitância fica diretamente proporcional a área das placas e a permissividade elétrica entre elas, porém inversamente proporcional a separação entre as placas.



(a)



(b)

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

$$\epsilon = \frac{Cd}{A} = \frac{1,5 \times 10^{-9} \times 2}{4 \times 100} \frac{F}{mm} = 7,5 \text{ p} \frac{F}{mm}$$

$$\epsilon = 7,5 \text{ n} \frac{F}{m}$$

- 5) Calcule o fluxo magnético na porção do plano $\phi=\pi/4$ definida por $0,02 \leq r \leq 0,05$ metros e $0 \leq z \leq 2$ metros,

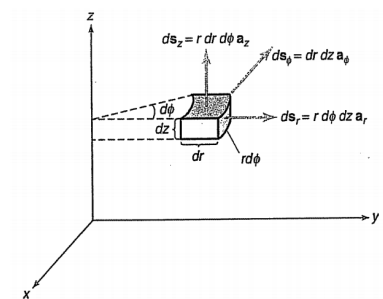
sabendo-se que uma corrente filamental de 4,0 ampères flui ao longo do eixo z na direção $\hat{z}$, e que $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}$, sendo o meio o vácuo.

- 5) Calcule o fluxo magnético na porção do plano $\phi=\pi/4$ definida por $0,02 \leq r \leq 0,05$ metros e $0 \leq z \leq 2$ metros,

sabendo-se que uma corrente filamental de 4,0 ampères flui ao longo do eixo z na direção $\hat{z}$, e que $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}$, sendo o meio o vácuo.

$$\psi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

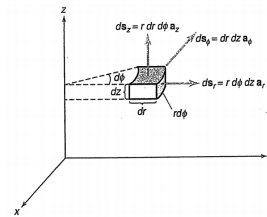
$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$



5) Calcule o fluxo magnético na porção do plano $\phi=\pi/4$ definida por $0,02 \leq r \leq 0,05$ metros e $0 \leq z \leq 2$ metros,

sabendo-se que uma corrente filamental de 4,0 ampères flui ao longo do eixo z na direção $\hat{z}$, e que $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}$, sendo o meio o vácuo.

$$\psi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{0,02}^{0,05} \int_0^2 \frac{4,0}{2\pi r} dr dz = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4,0 \cdot 2}{2\pi} \ln(5/2) = 1,466 \mu Wb$$



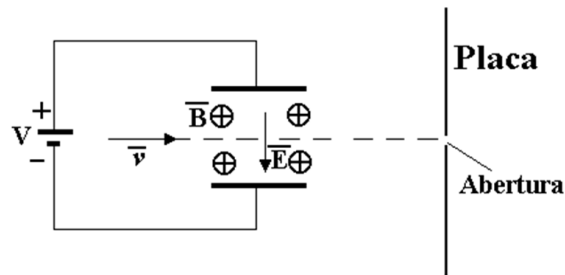
6) Ache o módulo da intensidade de campo magnético no interior de um material para o qual a densidade de fluxo magnético é 54 mWb/m² e a permeabilidade magnética relativa é 350.

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

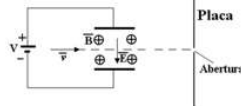
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$$

$$\vec{H} = \frac{B}{\mu_r \mu_0} = \frac{54 \cdot 10^{-3}}{350 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 122,777 \frac{A}{m}$$

7) Uma partícula carregada (positiva) movendo-se com velocidade constante v entra em uma região onde um campo elétrico E é ajustado pelas placas de deflexão vertical. As bobinas montadas horizontalmente ajustam um campo magnético B perpendicular ao campo elétrico, como ilustrado na figura abaixo. Uma placa metálica está localizada a uma distância, e um buraco é feito nessa placa alinhado com a velocidade original da partícula. Determine a velocidade das partículas carregadas que irão passar pelo centro do buraco, sendo $E=1 \text{ kV/m}$ e $B=0,5\text{mWb/m}^2$. A força de Lorentz estabelece que: $\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$.



$E=1 \text{ kV/m}$ e $B=0,5\text{mWb/m}^2$. A força de Lorentz estabelece que: $\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$.



Para não haver desvio a força tem que ser zero, logo: $v=E/B=1\text{k}/0,5\text{m}=2 \times 10^6 \text{ m/s}$

8) Os vetores $\bar{A} = 7\hat{r} + 5\hat{\theta} + 3\hat{\phi}$ e $\bar{B} = 2\hat{r} + 3\hat{\theta} + 4\hat{\phi}$ se situam no ponto $(r, \theta, \phi) = (3, 45^\circ, 45^\circ)$. Encontre, em coordenadas retangulares:

a) $\bar{A} + \bar{B}$ b) $\bar{A} \cdot \bar{B}$ c) $\bar{A} \times \bar{B}$

a) $\bar{W} = \bar{A} + \bar{B} = 9\hat{r} + 8\hat{\theta} + 7\hat{\phi}$

$\bar{S} = S_x\hat{x} + S_y\hat{y} + S_z\hat{z}$

	$\hat{\rho}$	$\hat{\phi}$	$\hat{z}$	$\hat{r}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\phi}$
$\hat{x}$	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
$\hat{y}$	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
$\hat{z}$	0	0	1	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

$S_x = \bar{W} \cdot \hat{x} = 9\sin\theta\cos\phi + 8\cos\theta\cos\phi + 7(-\sin\phi)$

$S_x = \bar{W} \cdot \hat{x} = 9\sin\theta\cos\phi + 8\cos\theta\cos\phi + 7(-\sin\phi)$

$S_x = \bar{W} \cdot \hat{x} = 9\sin 45^\circ \cos 45^\circ + 8\cos 45^\circ \cos 45^\circ - 7\sin 45^\circ$

$S_x = 3,55$

$$S_x = 3,55$$

$$S_y = \bar{W} \cdot \hat{y} = 9 \times 0,5 + 8 \times 0,5 + 7 \times \sqrt{0,5} = 13,45$$

$$S_z = \bar{W} \cdot \hat{z} = (9 - 8) \times \sqrt{0,5} = 0,707$$

$$\bar{S} = 3,55\hat{x} + 13,45\hat{y} + 0,707\hat{z}$$

$$b) \bar{A} \cdot \bar{B} = 2 \times 7 + 3 \times 5 + 4 \times 3 = 41$$

$$c) \bar{A} \times \bar{B} = \bar{V} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 11\hat{r} - 22\hat{\theta} + 11\hat{\phi}$$

Resultando em coordenadas retangulares

$$\bar{V} = -13,27\hat{x} + 2,28\hat{y} + 23,33\hat{z}$$

9) Expresse o campo vetorial

$$\bar{W} = (x^2 - y^2) \hat{y} + xz \hat{z}$$

a) Em coordenadas cilíndricas em $(6, 60^\circ, -4)$

b) Em coordenadas esféricas em $(4, 30^\circ, 120^\circ)$

a) De retangular para cilíndrica

Primeiro passo:

$$x = \rho \cos(\phi) = 6 \cos(60^\circ) = 3$$

$$y = \rho \sin(\phi) = 5,196$$

$$z = z = -4$$

substituindo

$$\bar{W} = -18 \hat{y} - 12 \hat{z}$$

Segundo passo:

As componentes W_ρ , W_ϕ e W_z são encontradas de:

$$\bar{W}_\rho = \bar{W} \cdot \hat{\rho}$$

$$\bar{W}_\phi = \bar{W} \cdot \hat{\phi}$$

$$\bar{W}_z = \bar{W} \cdot \hat{z}$$

	$\hat{\rho}$	$\hat{\phi}$	$\hat{z}$	$\hat{r}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\phi}$
$\hat{x}$	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
$\hat{y}$	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
$\hat{z}$	0	0	1	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

$$\bar{W}_\rho = \bar{W} \cdot \hat{\rho}$$

$$\bar{W}_\phi = \bar{W} \cdot \hat{\phi}$$

$$\bar{W}_z = \bar{W} \cdot \hat{z}$$

$$W_\rho = -18\sin\phi = -15,59$$

$$W_\phi = -18\cos\phi = -9$$

$$W_z = -12$$

$$\bar{W} = -15,59 \hat{\rho} - 9 \hat{\phi} - 12 \hat{z}$$

b)

$$x = r\sin\theta\cos\phi = -1$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi = \sqrt{3}$$

$$z = r\cos\theta = \sqrt{12}$$

No ponto $(4, 30^\circ, 120^\circ)$

$$\bar{W} = (x^2 - y^2) \hat{y} + xz \hat{z} = -2 \hat{y} - \sqrt{12} \hat{z}$$

Sendo as componentes

$$\bar{W}_r = \bar{W} \cdot \hat{r}$$

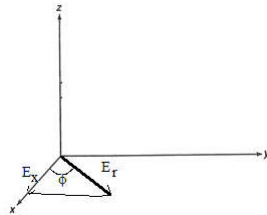
$$\bar{W}_\theta = \bar{W} \cdot \hat{\theta}$$

$$\bar{W}_\phi = \bar{W} \cdot \hat{\phi}$$

$$\bar{W} = -3,87 \hat{r} - 0,232 \hat{\theta} + \hat{\phi}$$

Exercícios propostos:

10) Uma carga pontual de 1 nC localiza-se na origem, no vácuo. Determine a equação da curva no plano $z=0$, para a qual $E_x=1$ V/m. $((x^2+y^2)^3=8/x^2)$



Sugestão de partida :

$$E_x = 1 = E_r \cos\phi$$

Exercícios propostos:

11) Considerando uma carga de $\pi\epsilon_0$ [nC] no ponto (1, 0, 1) [m] e uma superfície infinita de cargas carregada com $\epsilon_0/108$ [nC/m²] em $x = 4$ [m], determine o campo elétrico no ponto (0, 2, 3) [m], sendo o meio o espaço livre. Lembre-se que se ρ_s é uma densidade superficial de cargas no plano $x=0$ para $x>0$, $\vec{E} = \rho_s/2\epsilon_0 \hat{x}$ [V/m]. [Para a carga o campo elétrico fica :

$$\vec{E} = (-\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z})/108 \text{ V/m, e para a superfície } \vec{E} = -(1/108)\hat{x} \text{ V/m, resultando}$$

$$\vec{E} = \frac{-2\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}}{108} \text{ V/m]$$

Exercícios propostos:

12) Três superfícies infinitas e carregadas localizam-se no vácuo, da seguinte forma:

$2 \mu\text{C}/\text{m}^2$ em $x=-3$

$-5 \mu\text{C}/\text{m}^2$ em $x=1$

$24 \mu\text{C}/\text{m}^2$ em $x=5$

Determine o campo elétrico $\mathbf{E}$ nos pontos:

Respostas

a) (0; 0; 0) b) (2,5; -1,6; 4,7)

a) 169,49 kN/C

c) (-8; -2; -5)

b) -395 kN/C

c) 56,5 kN/C

13) Sejam as seguintes distribuições de cargas no vácuo:

$0,10 \text{ nC}/\text{m}^2$ na superfície $y = \pi \text{ m}$ (pi metros) e $0,4 \pi \text{ nC}/\text{m}$ na reta que passa pelo ponto $x=2 \text{ m}$, $z=3 \text{ m}$ e é paralela ao eixo y .

Determine $\vec{E}$, $|\vec{E}|$ e $\hat{E}$ no ponto P (1; 3; -1) metros, sabendo-se

que
$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \frac{N}{C}$$

ρ_L é a distribuição linear de cargas no eixo z e sendo ρ_s uma densidade superficial de cargas no plano $x=0$, para $x>0$

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{x} \frac{N}{C}$$

Resposta: $\vec{E} = -1,329\hat{x} - 5,64\hat{y} - 5,32\hat{z} \frac{N}{C}$ $|\vec{E}| = 7,866 \frac{N}{C}$

$$\hat{E} = -0,1689\hat{x} - 0,717\hat{y} - 0,676\hat{z} \frac{N}{C}$$