167037 Eletromagnetismo 1

Franklin da Costa Silva fcsilva@ene.unb.br

Aula 10

Objetivos :
Exercícios

Referência Bibliográfica:
-Eletromagnetismo para Engenheiros com Aplicações, Clayton R. Paul,, - LTC, 2006.

1) Uma onda senoidal de corrente é descrita por

$$i(z,t) = 4{,}3\cos(2\pi \text{x} 10^{6}t - 2{,}2\text{x}10^{-2}z)$$

a) Determine a velocidade de propagação e o comprimento de onda .
b) Se a onda percorre uma distância de 3 km determine o atraso de propagação e o deslocamento de fase.

Notamos que a expressão é do tipo:

$$i(z,t) = I_o\cos(\omega t - \beta z)$$

ω é a frequência angular ($\omega = 2\pi f$ rad/s)
β é a constante de fase , também conhecida como número de onda

$$i(z,t) = I_o \cos(\omega t \pm \beta z)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{v/_f} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{rad/m}$$

$$i(z,t) = I_o \cos(\omega t - \beta z)$$

Analisando a expressão acima com o sinal negativo, fazendo *i(z,t)* igual a uma constante, a medida que o tempo aumenta, para que *i(z,t)* continue com o mesmo valor constante claramente z tem que aumentar de forma a manter o mesmo valor da função cosseno. Logo trata-se de uma corrente que segue na direção positiva de *z*.

Já a onda abaixo segue na direção negativa.

$$i(z,t) = I_o \cos(\omega t + \beta z)$$

$$i(z,t) = I_o \cos(\omega t - \beta z)$$

Duas considerações importantes: Primeiro se é um sinal de corrente de condução, a mesma está confinada em um filamento, podendo considerar dessa forma um fio. Se a expressão for considerada como um campo elétrico, ou magnético, por exemplo:

$$\bar{E}(z,t) = E_o \cos(\omega t + \beta z)\hat{x} \quad N/C$$

Pode-se observar que trata-se de um meio sem perdas, a onda não atenua a medida que segue na direção negativa de *z* (veja o sinal mais antes da constante de fase) e apontando na direção *x* preenche todo o plano *xy*, pois não depende de *x* e *y* (onda plana uniforme).

Voltando ao exercício

$$i(z,t) = 4{,}3\cos(2\pi \mathrm{x}10^6 t - 2{,}2\mathrm{x}10^{-2} z)$$

a) Determine a velocidade de propagação e o comprimento de onda .

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v} \rightarrow v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \mathrm{x}10^6}{2{,}2\mathrm{x}10^{-2}} = 2{,}856\,\mathrm{x}10^8\ m/s$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2{,}2\mathrm{x}10^{-2}} = 285{,}6\ m$$

$$i(z,t) = 4{,}3\cos(2\pi \mathrm{x}10^6 t - 2{,}2\mathrm{x}10^{-2} z)$$

b) Se a onda percorre uma distância de 3 km determine o atraso de propagação e o deslocamento de fase.

Se $v = 285{,}6\,\mathrm{x}10^3\ km/s$

Gasta-se apenas $\mathrm{T} = \dfrac{3}{285{,}6\,\mathrm{x}10^3} = 10{,}5\ \mu s$

para percorrer os 3 km.

$$\beta = 2{,}2\mathrm{x}10^{-2}\ \ rad/m$$

Para cada metro percorrido tem-se 2,2x10^{-2} radianos de deslocamento de fase.
Em 3000m serão 3000x 2,2x10^{-2} = 66 radianos

Em graus: $\dfrac{66\mathrm{x}180}{\pi} = 3.781{,}5^{o}$

Se $\beta = 2{,}2\text{x}10^{-2}\ rad/m$

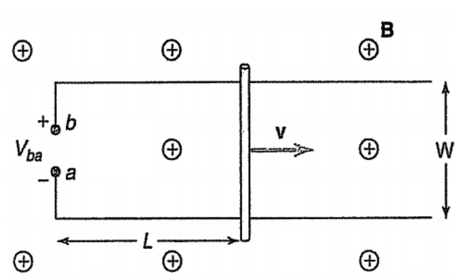
e o comprimento de onda $\lambda = 285{,}6\, m$

Cada comprimento de onda corresponde a 2π radianos. No caso, tem-se um deslocamento de 0,022 radianos na fase para cada metro, daí a denominação constante de fase.

Logo o comprimento elétrico da onda que cabe em um metro é somente 0,022 radianos.

Se β fosse igual a 5, seriam 5 ondas completas em um metro, logo daí o nome número de onda.

2) Seja uma barra metálica movendo com velocidade *v* ao longo de dois trilhos condutores paralelos separados pela largura W. Um campo magnético B está perpendicular ao plano formado pelos trilhos e pela barra.



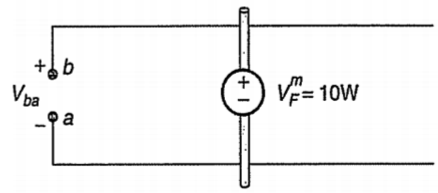
Determine a tensão induzida V_{ba} para $B = 2\ Wb/m^2$ e $v = 5\ m/s$.

Determine a tensão induzida V_{ba} para $B = 2\ Wb/m^2$ e $v = 5\ m/s$.

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \int_{\text{abaixo}}^{\text{topo}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= vBl \quad \text{V} \end{aligned}} \quad \text{(3.97) (livro texto)}$$

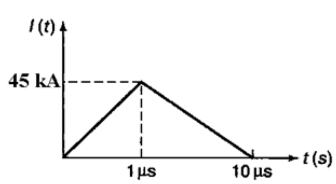
$$\text{fem de movimento} = \oint_c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

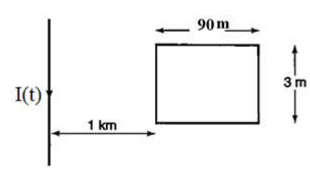
$$\begin{aligned} V_F^m &= Blv \\ &= BWv \\ &= 10W \\ V_{ba} &= V_F^m = 10W \end{aligned}$$



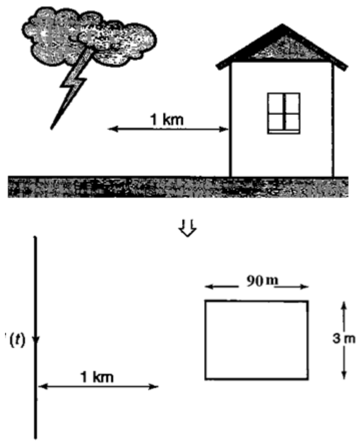
3) Relâmpagos são particularmente prejudiciais a dispositivos eletrônicos, mesmo que tais dispositivos não sejam atingidos diretamente. Por exemplo, um relâmpago pode ser considerado como uma corrente que cresce linearmente até atingir 45 kA em 1 µs e então decai linearmente a zero em 10 µs.

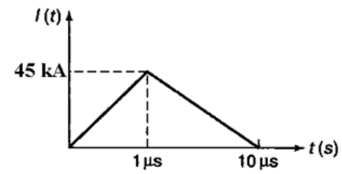
Assuma que a distribuição de fios em uma residência tenha dois fios, um passando ao nível do chão e outro do teto formando um retângulo como mostrado.



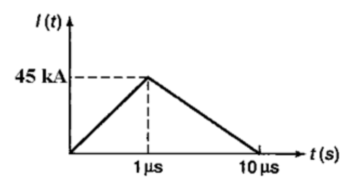


Determine o fluxo magnético dentro da área limitada pelo retângulo





$\psi = \iint \overline{B}.d\overline{S}$ e considere I(t) como em uma linha infinita de corrente, onde $B(t) = \dfrac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$.

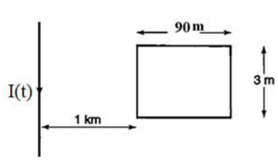


Solução: Para uma linha de corrente infinitamente longa, tem-se que $B(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$

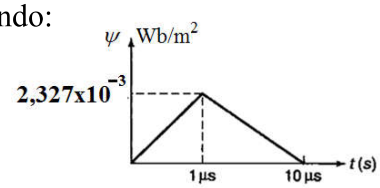
Logo

$$\psi = \iint \overline{B}.d\overline{S} = \int_0^3 \int_{1000}^{1090} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} dr dz = \frac{3.4\pi.10^{-7}}{2\pi} I(t)\ln(1{,}09) = 6.10^{-7}\ln(1{,}09) I(t)$$

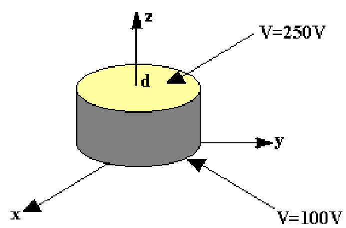
$$= 5{,}171.10^{-8} I(t) \quad \text{Wb/m}^2$$

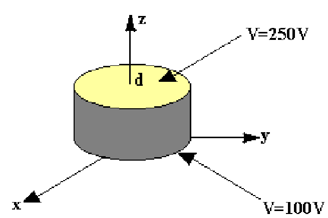


Resultando:



4) Os discos paralelos condutores da Fig. ao lado estão separados por 5 mm e contêm um dielétrico para o qual a constante dielétrica é 2,2. Calcule as densidades superficiais de cargas nos discos, considerando o raio muito maior que a separação de 5 mm.





O campo elétrico entre os discos pode ser aproximado por

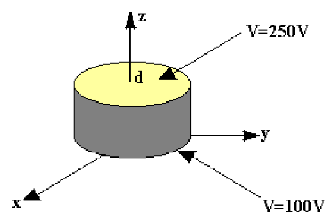
$$\mathrm{E} = \frac{250 - 100}{0{,}005} = 30.000\ V/m$$

Considerando como planos infinitos de cargas, tem-se que para um plano

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon}$$

Porém o plano superior tem cargas positivas e cargas negativas no inferior, de forma que o campo total entre os planos fica:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}$$



$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}$$

$$\rho_s = \varepsilon E = 2{,}2x8{,}854x10^{-12}x30.000 = 0{,}584\,\mu\,C/m^2$$

Com cargas positivas na placa de 250 V e negativas na de 100 V.
É importante observar que esse é o valor da componente normal da densidade de fluxo elétrico na superfície dos condutores:

$$D_n = \rho_s$$

5) Conside dois meios com interface de separação em y=0, sendo o meio 1 (y<0) o vácuo e o meio 2 (y>0) um dielétrico sem perdas com permissividade elétrica relativa igual a 9. Sabendo-se que as componentes tangencias do campo elétrico são iguais nos dois lados na interface de separação e que o mesmo é válido para as componentes normais da densidade de fluxo elétrico, determine o campo elétrico na interface de separação no meio 2, sendo que que na interface de separação no meio 1

$$\overline{E}_1 = 2\hat{x} - 4{,}5\hat{y} + 4\hat{z} \quad \frac{V}{m}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12} \quad \frac{F}{m} \qquad \mu_0 = 4\pi.10^{-7} \quad \frac{H}{m}$$

As componentes tangencias do campo elétrico são iguais nos dois lados na interface de separação e que o mesmo é válido para as componentes normais da densidade de fluxo elétrico

$$\overline{E}_1 = 2\hat{x} - 4{,}5\hat{y} + 4\hat{z} \quad \frac{V}{m} \qquad \mu_0 = 4\pi.10^{-7} \quad \frac{H}{m} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12} \quad \frac{F}{m}$$

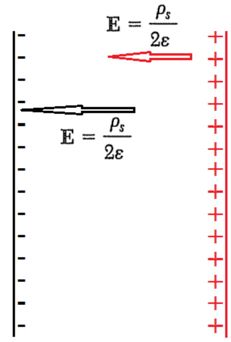
Solução: Superfície de separação y=0

$$E_{x2} = E_{x1} = 2 \quad E_{z2} = E_{z1} = 4 \quad D_{y2} = D_{y1} \rightarrow \varepsilon_1 E_{y1} = \varepsilon_2 E_{y2}$$

$$\rightarrow E_{y2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{y1} = \frac{1}{9}(-4{,}5) = -0{,}5$$

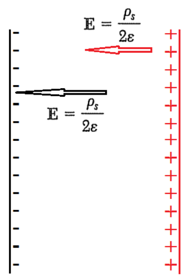
Logo $\overline{E}_2 = 2\hat{x} - 0{,}5\hat{y} + 4\hat{z} \quad \frac{V}{m}$

6) Seja um capacitor de placas paralelas, onde as dimensões da placa são muito maiores que a separação podendo o campo interno as placas serem considerados como o de duas placas infinitas, com distribuições superficiais de cargas sendo uma positiva e outra negativa. Determine a expressão da capacitância.



Resultando em um campo elétrico total de:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}$$



$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}$$

Considerando uma superfície gaussiana envolvendo uma das placas do capacitor:

$$Q = \oiint \overline{D}.\overline{ds} = \frac{\varepsilon\rho_s S}{\varepsilon} = \rho_s S$$

A diferença de potencial entre as placas fica:

$$V = Ed = \frac{\rho_s d}{\varepsilon}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s S}{\frac{\rho_s d}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon S}{d}$$