# 107484 – Controle de Processos

## Aula 15: Margem de Fase e Margem de Ganho


Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB


$1^o$ Semestre 2020

# Sumário

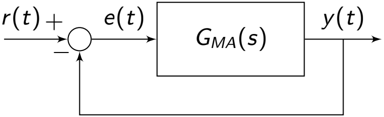
1 Critério de Estabilidade

2 Margem de Ganho

3 Margem de Fase

# Revisando o critério de estabilidade

- Seja um sistema em malha fechada na forma




- A frequência crítica ou frequência de cruzamento de fase ($\omega_{co}$) é dada por:

$$\omega_{co} = \{\omega : \angle G_{MA}(j\omega) = -180°\}$$

## Critério de estabilidade de Bode

O sistema em malha fechada é **estável** se a resposta em frequência do sistema em malha aberta atende a condição

$$RA_{MA}(\omega_{co}) = |G_{MA}(j\omega_{co})| < 1.$$

Caso contrário, o sistema é instável.

- Obs.: Condições para aplicar o critério de estabilidade de Bode: considere uma função de transferência de malha aberta estritamente própria ($np > nz$) e de fase mínima (sem pólos e zeros no SPD e sem polos no eixo imaginário, exceção de polo simples na origem). A resposta em frequência de malha aberta tem apenas um único $\omega_{co}$ e um único $\omega_g$.

# Sumário


1 Critério de Estabilidade

2 Margem de Ganho

3 Margem de Fase

# Margem de Ganho

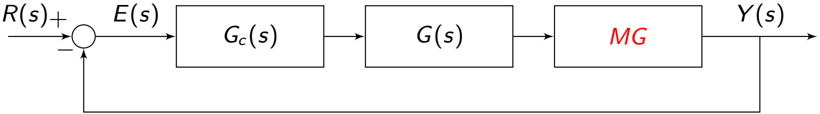
**Definição: Margem de Ganho (MG)**

- Margem de Ganho: $MG = \dfrac{1}{|G_{MA}(j\omega_{co})|}, \quad \omega_{co} \triangleq \{\omega : \angle G_{MA}(j\omega) = -180°\}$
- Estabilidade: $MG > 1$

- Interpretação: máxima variação permitida do ganho estático do sistema em malha aberta
- Medida de "distância" da instabilidade

  Ex.: $MG = 1,7$ significa que RA pode aumentar 1,7 vezes do valor de projeto antes do sistema se tornar instável (MF)
- $\uparrow MG \Rightarrow \uparrow$ robustez (fator de segurança na sintonia)
- Robustez *versus* desempenho (trade off)
- Em termos práticos, adotar $1,7 \leq MG \leq 4,0$

  $\rightarrow$ Maior valor de $MG$ que a malha pode suportar antes de instabilizar



# Sumário

1 Critério de Estabilidade

2 Margem de Ganho

3 Margem de Fase

# Margem de Fase

## Definição: Margem de Fase (MF)

- Margem de Fase: *distância* da fase na frequência em que $|G_{MA}(j\omega)| = 1$ a $-180°$, ou seja,

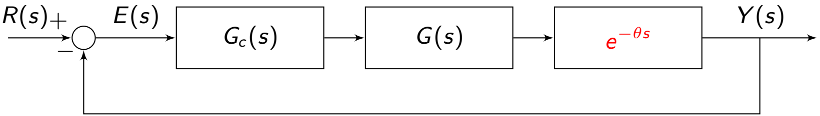
$$MF = \angle G_{MA}(j\omega_g) + 180°, \quad \omega_g \triangleq \{\omega : |G_{MA}(j\omega)| = 1\}$$

- Estabilidade: $MF > 0$

- Atraso de fase necessário para instabilizar o sistema em MF
- Interpretação: maior valor de tempo morto ($\theta$) ou dinâmica que a malha pode suportar antes de instabilizar
- Cálculo do máximo tempo morto: $\angle e^{-j\omega_g\theta} = -\omega_g\theta(\frac{180^o}{\pi}) = -MF$

$$\theta = \frac{MF}{\omega_g} \cdot \frac{\pi}{180°}$$

- Em termos práticos, para uma boa robustez $45° \geq MF \geq 30°$



# Exemplo: margem de ganho e de fase

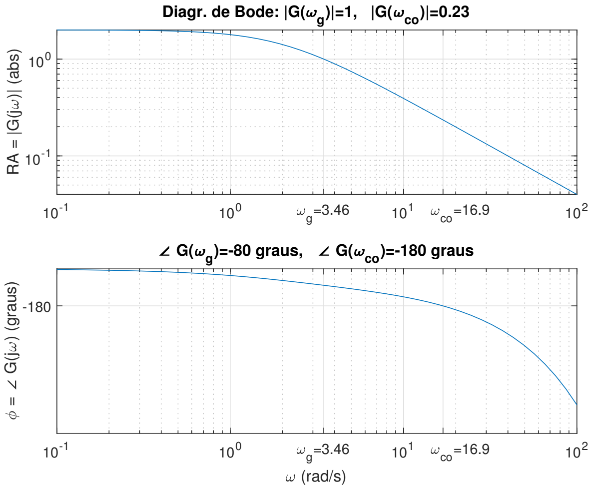



Figura: Sistema estável pois $MG = 1/|G_{MA}(j\omega_{co})| = 1/0.23 > 1$ e $MF = 100^\circ > 0$.

# Exemplo: margem de ganho e de fase

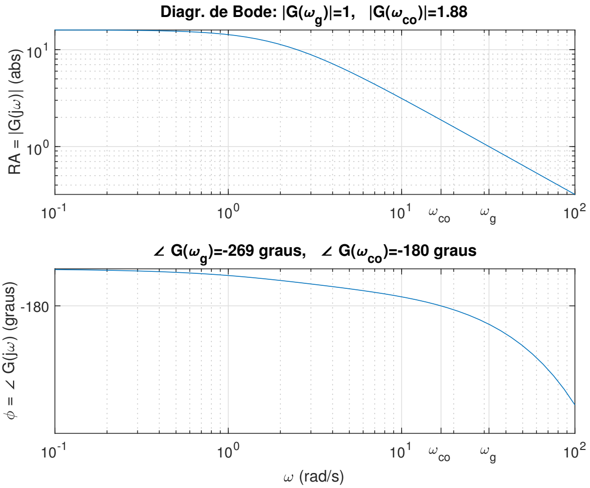



Figura: Sistema instável pois $MG = 1/|G_{MA}(j\omega_{co})| = 1/1.88 < 1$ e $MF = -89^\circ < 0$.

# Exemplo I

- Seja o sistema

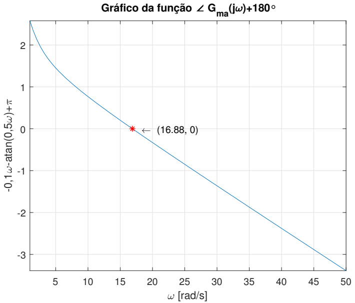
$$G_{ma}(s) = \frac{K_c e^{-0,1s}}{0,5s+1}$$

$$\omega_{co}: \quad \angle G_{ma}(j\omega_{co}) = -180°$$

$$\angle e^{-j0,1\omega_{co}} - \angle(j0,5\omega_{co}+1) = -\pi$$

$$-0,1\omega_{co} - \mathrm{tg}^{-1}(0,5\omega_{co}) = -\pi$$

$$\omega_{co} = 16,887 \ {}^{\mathrm{rad}}/_{s} \approx 17 \ {}^{\mathrm{rad}}/_{s}$$




$$\frac{RA}{K_c} = \frac{|G_{ma}(j\omega_{co})|}{K_c} = \frac{1}{\sqrt{(0,5\omega_{co})^2+1}} = 0,1176 \approx 0,12$$

$$\therefore |G_{ma}(j\omega_{co})| = 0,12K_c, \qquad MG = \frac{1}{0,12K_c}$$

- O limite de estabilidade ocorre com $K_c = \dfrac{1}{0,12} = 8,5025 \ (MG = 1)$.

# Exemplo I

- Seja a especificação de projeto $MG = 1,7$, então $K_c = 4,9$.
- Cálculo da margem de fase: $MF = \angle G_{MA}(j\omega_g) + 180°$, $\omega_g = \{\omega : |G_{MA}(j\omega)| = 1\}$:

$$\omega_g : \quad |G_{ma}(j\omega_g)| = 1$$
$$\frac{4,9}{\sqrt{(0,5\omega_g)^2 + 1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_g = 9.59 \ {}^{\text{rad}}/_{s}$$
$$\therefore MF = \angle G_{ma}(j\omega_g) + 180°$$
$$= -0,1\omega_g - \text{tg}^{-1}(0,5\omega_g) + \pi$$
$$= -133.2° + 180° = 46.8°$$

- Com $K_c = 4,9$, considere que o atraso mudou do valor atual $0,1s$ para $0,15s$ (aumento de 50%). Houve mudança no gráfico da fase mas não no ganho.

$$-0,15\omega_{co} - \text{tg}^{-1}(0,5\omega_{co}) = -\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_{co} = 11,6 \ {}^{\text{rad}}/_{s}$$

e

$$|G_{ma}(j\omega_{co})| = \frac{4,9}{\sqrt{(0,5 \cdot 11,6)^2 + 1}} = 0,83 \quad \text{(sist. MF estável)}$$

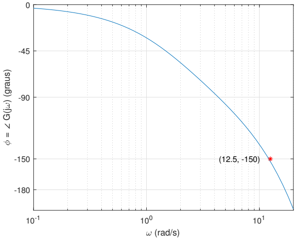
# Exemplo I

- Com o atraso de 0.1s, considere agora a especificação de projeto de $MF = 30°$:

$$30° = 180° + (-0,1\omega - \text{tg}^{-1}(0,5\omega))$$

$$\omega \approx 12,5\ {}^{\text{rad}}/_{s}$$

Nesta frequência, achando o ganho tal que $|G_{ma}(j12,5)| = 1$, tem-se




$$|G_{ma}(j\omega)| = \frac{|K_c|}{\sqrt{(0,5\omega)^2 + 1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad K_c = \sqrt{(0,5 \cdot 12,5)^2 + 1} = 6,23$$

# Exemplo I

- Calculando o atraso adicional máximo permitido com $MF = 30^\circ$:

$$\theta_{\text{adicional}} = \frac{MF}{\omega_g} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{30}{12,5} \frac{\pi}{180} = 0.042\text{s}$$

$\rightsquigarrow$ $\theta_{\max} = \theta_{\text{atual}} + \theta_{\text{adicional}} = 0.1 + 0.042 = 0.142\text{s}$

- Considere a mudança do atraso $0,1 \to 0,15$s com $K_c = 6,23$.

  $\rightsquigarrow$ Valor da fase em $\omega = 12,5\ {}^{\text{rad}}/_{s}$ em que $|G_{ma}(j\omega)| = 1$:

$$\phi = -\text{tg}^{-1}(0,5\omega) - 0,15\omega = -188^\circ \qquad \therefore MF = -8^\circ < 0 \quad \text{(sist. MF instável)}$$

# Exemplo I

- Considere agora o projeto com $MF = 45°$ ($K_c = 5,05$). O sistema seria estável com $\uparrow$ 50% no atraso ($0,1 \rightarrow 0,15$). Contudo, o sistema não seria estável para $\downarrow$ 50% em $\tau$ ($0,5 \rightarrow 0,25$)

$$
\begin{aligned}
\tau = 0,25 \quad \Rightarrow \quad & \omega_{co} = 17,9 \ {}^{\text{rad}}/_{s} \quad \text{e} \\
& RA(\omega_{co} = 17,9,\ K_c = 5,05) = 1,1 > 1 \\
& \therefore \text{instável}
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Verifique!

# Exemplo II - Ganho estático do sistema negativo

- Seja o controlador proporcional $G_c(s) = K_c$ e o processo

$$G(s) = \frac{-2(3s+1)}{5s^2+2s+1},$$ ganho estático: $G(0) = -2$; polos: $-0.2 \pm j0.4$; zero: $-1/3$

- Eq. característica do sist. em MF: $p(s) = (5s^2 + 2s + 1) + (-K_c)(6s + 2)$

- Aplicando o critério de estabilidade de Routh em $p(s) = 0$ tem-se $K_c < 1/2$ e $K_c < 1/3$, ou seja, o sistema em malha fechada é estável para $-\infty < K_c < 1/3$.

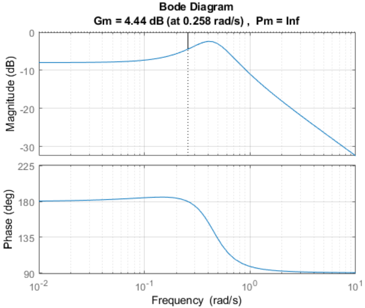
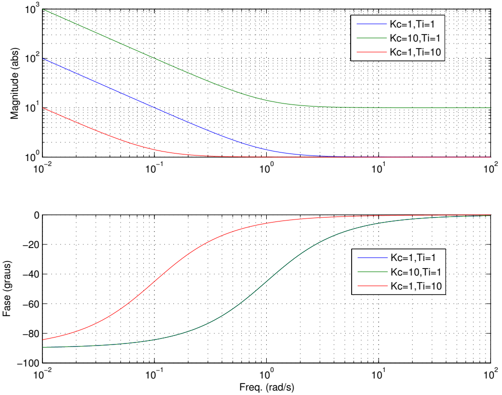



Diagrama de Bode e margens de ganho ($Gm = 20log_{10}(MG)$) e de fase ($Pm = MF$) para $K_c = 0.2$.
Obs.: $[dB] = 20log_{10}([Absoluto])$; $[Absoluto] = 10^{[dB]/20}$.

# Diagrama de Bode de um compensador PI

- Seja o controlador PI: $$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{K_c}{s}\left(s + \frac{1}{T_i}\right)$$



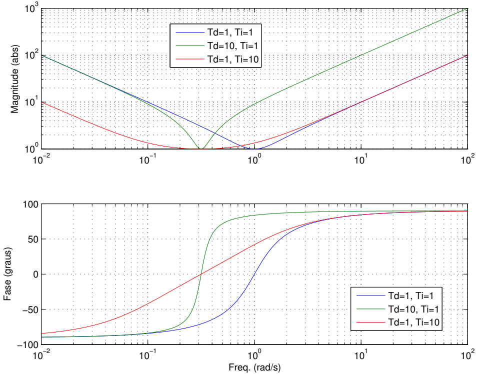

- Menor erro de regime permanente à custo diminuição de fase em $\omega < \frac{1}{T_i}$

$\therefore\ \omega = \dfrac{1}{T_i} < \omega_c$ (freq. corte da FTMA) para que a margem de fase não seja alterada significativamente.

# Diagrama de Bode de um compensador PID

- Seja o controlador PID: $$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = \frac{K_c}{T_i s}\left(T_i T_d s^2 + T_i s + 1\right)$$

$\rightsquigarrow$ Um pólo na origem e dois zeros: $z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4T_d/T_i}}{2T_d}$




Resposta em frequência de um PID com $(K_c, T_i, T_d) = (1, 1, 1)$ (zeros em $-0.5000 \pm j0.8660$), $(K_c, T_i, T_d) = (1, 1, 10)$ (zeros em $-0.0500 \pm j0.3122$) e $(K_c, T_i, T_d) = (1, 10, 1)$ (zeros em $-0.8873; -0.1127$).