107484 – Controle de Processos

Aula 14: Critério de Estabilidade (Bode)

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

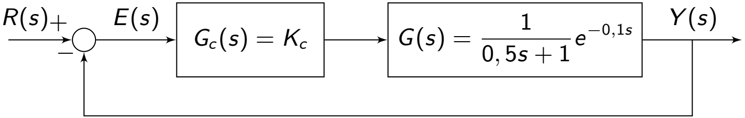
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB

1º Semestre 2020

Sumário

Critério de Estabilidade

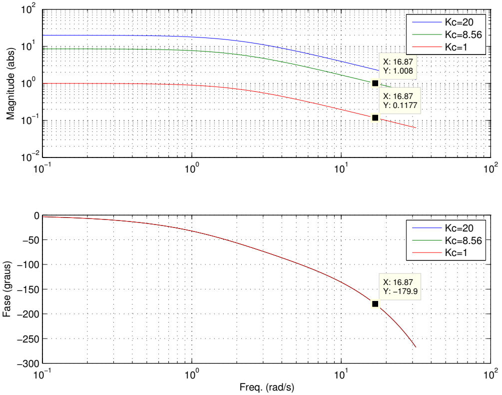
- Razões para análise de estabilidade via resposta em frequência:
  1. Indicadores mais representativos para caracterizar robustez
  2. Análise de funções de transferência com tempo morto sem aproximações
  3. Identificação de sistemas via reposta em frequência
- Considere o sistema abaixo



Função de transferência de malha aberta: $G_{MA}(s) = G_c(s)G(s)$.

- Considere a frequência $\omega_{co} = \{\omega : \angle G_{MA}(j\omega) = -180°\}$

Critério de Estabilidade



Resposta em frequência de $G_{MA}(s) = \dfrac{K_c}{0.5s+1}e^{-0,1s}$.

$$\omega_{co} = \{\omega : \angle G_{MA}(j\omega) = -180°\} : \qquad \frac{|G_{MA}(j\omega)|}{K_c} = \frac{1}{\sqrt{(0,5\omega_{co})^2+1}} \approx 0,12$$

$$|G_{MA}(j\omega)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_c = 8,56$$

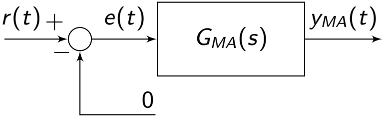
Critério de Estabilidade

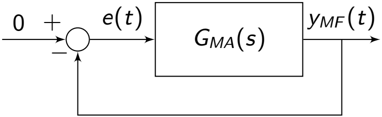
- Em malha aberta

No caso $|G_{MA}(j\omega)| = 1$ $(K_c = 8,56)$ em ω_{co}

$$r(t) = \text{sen}(\omega_c t) \Rightarrow y_{MA}(t) = \text{sen}(\omega_{co} t - 180^\circ) = -\text{sen}(\omega_{co} t)$$

- Se em $t = 0 \Rightarrow$ zerar entrada $(r = 0)$ e fechar a malha $\Rightarrow y_{MF}(t) = y_{MA}(t)$





Contudo se

- $K_c > 8,56$ $(|G_{MA}(j\omega)| > 1$ em $\omega_{co})$
  $\Rightarrow$ em MF amplitude aumenta (sistema instável em MF)
- $K_c < 8,56$ $(|G_{MA}(j\omega)| < 1$ em $\omega_{co})$
  $\Rightarrow$ sistema estável em MF

Critério de Estabilidade

Observação

- Polos em MF: Raízes de: $1 + G_{MA}(s) = 0$
- Assumindo raízes imaginárias: $s = j\omega$ (limite de estabilidade)

$$1 + G_{MA}(j\omega) = 0$$

$$G_{MA}(j\omega) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \\ \angle G(j\omega) = -180^\circ \end{cases}$$

Se existir K_c tal que isso acontece

$$\begin{cases} K_c = K_u \\ \omega_{co} = \omega_u \end{cases}$$

Critério de Estabilidade

Definições

1. Frequência crítica ou frequência de cruzamento de fase (ω_{co}):

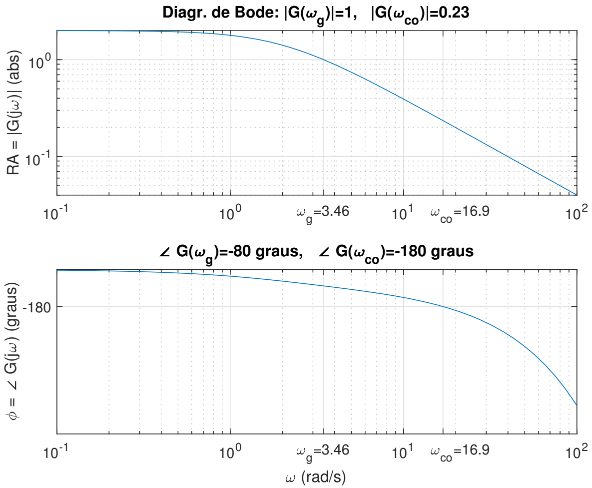
$$\omega_{co} \triangleq \{\omega : \angle G_{MA}(j\omega) = -180°\}$$

2. Frequência de cruzamento de ganho (ω_g):

$$\omega_g \triangleq \{\omega : |G_{MA}(j\omega)| = 1\}$$

- Num sistema marginalmente estável: $\omega_{co} = \omega_g$
- Obs.: Pode ocorrer múltiplos valores de ω_{co} ou ω_g.

Critério de Estabilidade



$$\omega_{co} \triangleq \{\omega : \angle G_{MA}(j\omega) = -180^\circ\} \qquad \omega_g \triangleq \{\omega : |G_{MA}(j\omega)| = 1\}$$

Sumário

Critério de Estabilidade de Bode

Critério de estabilidade de Bode

O sistema em malha fechada é estável se a resposta em frequência de malha aberta atende a condição

$$RA_{MA}(\omega_{co}) = |G_{MA}(j\omega_{co})| < 1.$$

Caso contrário, o sistema é instável.

Condições para aplicar o critério de estabilidade de Bode

Considere uma função de transferência de malha aberta estritamente própria ($np > nz$) e de fase mínima (sem pólos e zeros no SPD e sem polos no eixo imaginário, exceção de polo simples na origem). A resposta em frequência de malha aberta tem apenas um único ω_{co} e um único ω_g.

Obs.: Se as condições acima não são atendidas $\Rightarrow$ Critério de Nyquist

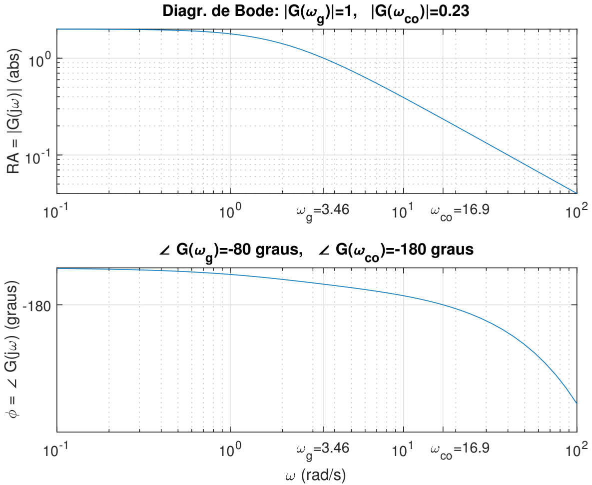


Figura: Sistema estável pois $|G_{MA}(j\omega_{co})| = 0.23 < 1$.

Critério de Estabilidade de Bode

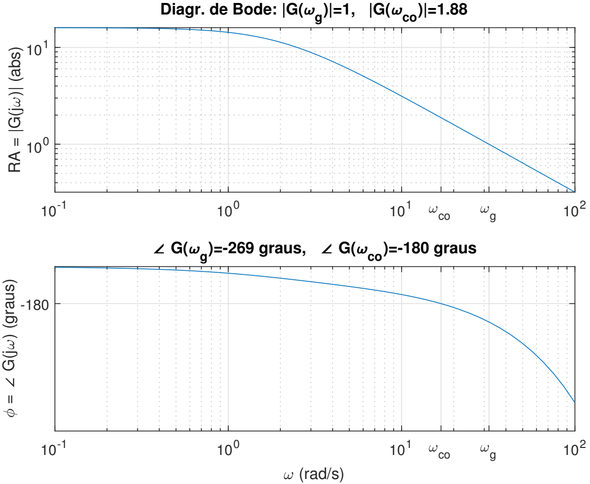


Figura: Sistema instável pois $|G_{MA}(j\omega_{co})| = 1.88 > 1$.

Exemplos

①

$$\begin{cases} G_c = K_c \\ G_p = \dfrac{K_p}{\tau s + 1} \\ G_m = K_m \end{cases} \Rightarrow \quad G_{MA} = G_c G_p G_m = \frac{K_c K_p K_m}{\tau s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Fase: $\phi = \angle G_{MA}(j\omega) = -\text{tg}^{-1}\omega\tau \quad \in [0^\circ, -90^\circ)$

$\therefore$ sistema sempre estável pois $\nexists \omega_{co}$

②

$$G_m = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} \quad \Rightarrow \quad G_{MA} = \frac{K}{(\tau s + 1)(\tau_m s + 1)}$$

$\phi \in [0^\circ, -180^\circ)$

$\phi = -180^\circ$ quando $\omega \to \infty$

$\therefore$ sistema sempre estável pois $\nexists \omega_{co}$ finito

Exemplos

③

$$G_m = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} \quad \text{e} \quad G_f = \frac{K_f}{\tau_f s + 1} \quad \Rightarrow \quad G_{MA} = \frac{K}{(\tau s + 1)(\tau_m s + 1)(\tau_f s + 1)}$$

$\phi \in [0^\circ, -270^\circ)$

$\therefore\ \exists K_c$ tal que o sistema é instável

④

$$G_m = K_m e^{-0,5s} \quad \Rightarrow \quad G_{MA} = \frac{K e^{-0,5s}}{\tau s + 1}$$

$\phi = \mathrm{tg}^{-1}(-\tau\omega) + (-0,5\omega) \ \in\ [0^\circ, -\infty)$

$\therefore\ \exists K_c$ tal que o sistema é instável (atraso: principal fonte de instabilidade em processos químicos)

Exemplos

- Cálculo ω_{co}:

$$-\text{tg}^{-1}(\tau\omega_{co}) - 0,5\omega_{co} = -180^\circ$$

- Cálculo de K_u ($K_c = K_u$):

$$|G(j\omega_{co})| = \frac{|\bar{K}_u|}{|1 + j\omega_{co}\tau|} = 1, \qquad K_u = \frac{\bar{K}_u}{K_p K_m}$$

Restrições do critério de estabilidade de Bode

- Apenas para sistemas de fase mínima

  caso contrário $\rightarrow$ critério de Nyquist
- Somente quando RA e ϕ de malha aberta decrescem continuamente quando ω aumenta

Critério de Estabilidade de Bode

Observações:

- Grande maioria dos processos químicos

$$RA, \phi \downarrow \quad \Rightarrow \quad \omega \uparrow \quad \Rightarrow \quad \text{Critério de Bode apropriado e poderosa ferramenta}$$

- Para usar o critério de Bode $\rightarrow$ opções:
  1. Numérica: conhecimento das FTs.
  2. Experimental: gráfico a partir de ensaios experimentais via aplicação de senóides em várias frequências.