

107484 – Controle de Processos

Aula: Análise da Resposta em Frequência

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



1º Semestre 2020

1 Análise da Resposta em Frequência

2 Diagrama de Bode

- Seja o sistema linear e invariante no tempo

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

- Considere que a entrada é um sinal senoidal e descrita na forma

$$r(t) = R \operatorname{sen}(\omega t) \quad \Leftrightarrow \quad R(s) = R \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- Saída do sistema

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) R \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{b_n}{s - p_n} \end{aligned}$$

em que a e b_i são constantes, \bar{a} é complexo conjugado de a , e p_i , $i = 1, \dots, n$, são os pólos de $G(s)$

Resposta em Frequência

- Aplicando a transformada inversa de Laplace para obter $y(t)$

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + \underbrace{[\text{termos devido a } G(s)]}_{b_1 e^{p_1 t} + \dots + b_n e^{p_n t}}, \quad t \geq 0$$

- Considerando o sistema estável, os pólos p_i , $i = 1, \dots, n$, têm parte real negativa, logo $t^m e^{p_i t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, para $m = 0, 1, \dots$

- Em estado estacionário

$$y_{ee}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

em que

$$\begin{aligned} a &= G(s)R \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = G(s) \frac{R\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} \\ &= -G(-j\omega) \frac{R}{2j} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\bar{a} = G(s)R \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \frac{R}{2j}$$

- Logo

$$y_{ee}(t) = \frac{R}{2j} \left(G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)e^{-j\omega t} \right)$$

- $G(j\omega)$ é uma função de variável complexa, logo pode ser escrita como

$$G(j\omega) = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\},$$

e representada por

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

em que

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}^2}, \quad \phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}} \right\}$$

- Analogamente,

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$$

- Portanto

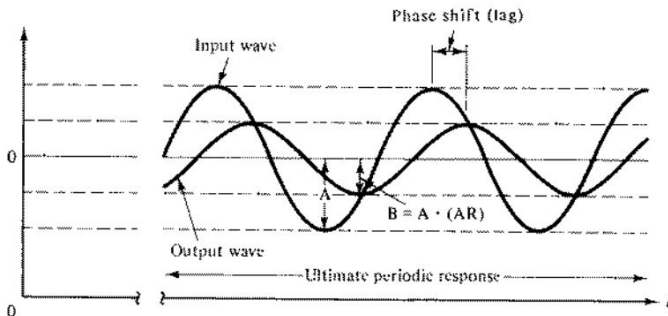
$$\begin{aligned}y_{ee}(t) &= \frac{R}{2j} \left(G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)e^{-j\omega t} \right) \\&= |G(j\omega)| \frac{R}{2j} \left(e^{j\phi} e^{j\omega t} - e^{-j\phi} e^{-j\omega t} \right) \\&= R|G(j\omega)| \left(\frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \right) \\&= R|G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi) \\&= Y \text{sen}(\omega t + \phi), \quad Y = R|G(j\omega)|\end{aligned}$$

Resumo

- Sistema: $G(s) = Y(s)/R(s)$
- Entrada: $r(t) = R \text{sen}(\omega t)$
- Saída: $y_{ee}(t) = Y \text{sen}(\omega t + \phi)$, $Y = R|G(j\omega)|$ (regime permanente)
- Ganho ou razão de amplitude:** $RA = Y/R = |G(j\omega)|$
- Diferença do ângulo de fase ou defasagem:** $\phi = \angle G(j\omega)$

Resposta em Frequência

Para um sistema linear e invariante no tempo estável a resposta em estado estacionário a uma entrada senoidal será também senoidal de mesma frequência com diferente **amplitude** e **fase**



- Considere

$$G(j\omega) = \frac{G_a(j\omega)G_b(j\omega)G_c(j\omega)}{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)}$$

- A magnitude e o ângulo de $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$ pode ser expresso na forma

$$|G(j\omega)| = \frac{|G_a(j\omega)||G_b(j\omega)||G_c(j\omega)|}{|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)||G_3(j\omega)|}$$

e

$$\angle G(j\omega) = \angle G_a(j\omega) + \angle G_b(j\omega) + \angle G_c(j\omega) - \angle G_1(j\omega) - \angle G_2(j\omega) - \angle G_3(j\omega)$$

- Portanto,

$$G(j\omega) = \frac{|G_a(j\omega)||G_b(j\omega)||G_c(j\omega)|}{|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)||G_3(j\omega)|} e^{j(\phi_a+\phi_b+\phi_c-\phi_1-\phi_2-\phi_3)}$$

Sistema de 1ª ordem

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

$$RA = |G(j\omega)| = \frac{|K|}{|1 + j\omega\tau|} = \frac{|K|}{\sqrt{1^2 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = \angle K - \angle(1 + j\omega\tau) = 0 - \text{tg}^{-1}(\omega\tau) = -\text{tg}^{-1}(\omega\tau)$$

• Alternativamente

$$\begin{aligned} G(s = j\omega) &= \frac{K}{1 + j\omega\tau} = \frac{K}{1 + j\omega\tau} \cdot \frac{1 - j\omega\tau}{1 - j\omega\tau} \\ &= \frac{K}{1 + (\omega\tau)^2} (1 - j\omega\tau) = \frac{K}{1 + (\omega\tau)^2} - j \frac{K\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \\ &= \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega) \end{aligned}$$

$$RA = |G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)}, \quad \phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} \right)$$

Integrador

$$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \begin{cases} RA = |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \\ \phi = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } -90^\circ \end{cases}$$

Função de transferência de avanço de 1a. ordem

$$G(s) = K(1 + \tau s)$$

$$RA = |G(j\omega)| = |K||1 + j\omega\tau| = |K|\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = \angle K + \angle(1 + j\omega\tau) = 0 + \text{tg}^{-1}(\omega\tau) = \text{tg}^{-1}(\omega\tau)$$

1 Análise da Resposta em Frequência

2 Diagrama de Bode

1 Sistema de 1ª ordem

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} = K \cdot \frac{1}{\tau s + 1} = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

$$\bullet G_1(j\omega) = K \quad \begin{cases} RA = |G_1(j\omega)| = |K| \\ \phi = \angle G_1(j\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\bullet G_2(j\omega) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad \begin{cases} RA = |G_2(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \\ \phi_2 = \angle G_2(j\omega) = -\text{tg}^{-1}(\omega\tau) \end{cases}$$

Definindo

$$\bullet \text{ Razão de Magnitude: } RM := \frac{RA}{G(0)}$$

Propriedades

$$\log \frac{[(ab)]^n}{cd} = n \log a + n \log b - \log c - \log d$$

- Escala decibel: $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ [dB]

$$\log_{10} |G_1(j\omega)| = \log_{10} |K|$$

$$\begin{aligned}\log_{10} |G_2(j\omega)| &= \log_{10} \left(\frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \log_{10} 1 - \frac{1}{2} \log_{10}(1 + (\omega\tau)^2) \\ &= -\frac{1}{2} \log_{10}(1 + (\omega\tau)^2)\end{aligned}$$

- Observe que $\log_{10} |G(j\omega)| = \log_{10} |K| - \frac{1}{2} \log_{10}(1 + (\omega\tau)^2)$

Ganho

$$\omega \rightarrow 0 \quad (\omega\tau \ll 1) \quad \Rightarrow \quad \log_{10} |G_2(j\omega)| = -\frac{1}{2} \log_{10} 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \log_{10} |G(j\omega)| = \log_{10} |K|$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad (\omega\tau \gg 1) \quad \Rightarrow \quad \log_{10} |G_2(j\omega)| = -\frac{1}{2} \log_{10} (\omega\tau)^2 = -\log_{10} (\omega\tau)$$

$$\Rightarrow \quad \log_{10} |G(j\omega)| = \log_{10} |K| - \log_{10} (\omega\tau)$$

Frequência de corte

$$\omega_c = 1/\tau \quad \Rightarrow \quad \log_{10} |G_2(j\omega_c)| = -\frac{1}{2} \log_{10} 2 = -0,15$$

$$\text{Em dB:} \quad 20 \log_{10} |G_2(j\omega_c)| = -10 \log_{10} 2 = -3 \text{ dB}$$

Fase

$$\omega \rightarrow 0 \quad (\omega\tau \ll 1) \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_2 = -\text{tg}^{-1}0 = 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad (\omega\tau \gg 1) \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} -\text{tg}^{-1}(\omega\tau) = -90^\circ$$

Frequência de corte

$$\omega_c = 1/\tau \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_2 = -\text{tg}^{-1}(1) = -45^\circ$$

Taxa de decaimento

Comparando o ganho [dB] em diferentes frequências em altas frequências:

- Para $\omega_2 = 10\omega_1$

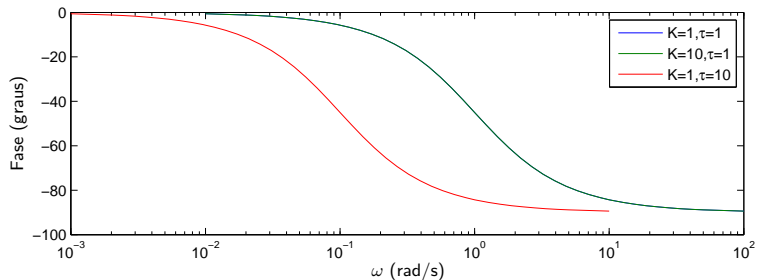
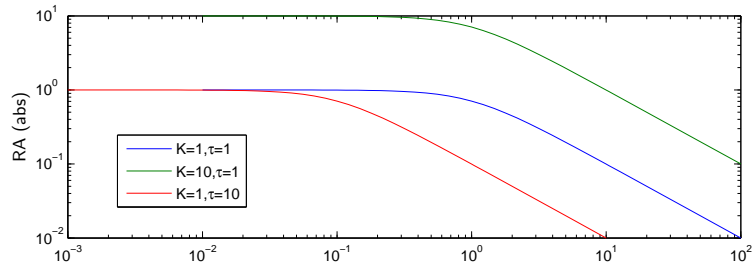
$$\begin{aligned}(-20 \log_{10} \omega_2 \tau) - (-20 \log_{10} \omega_1 \tau) &= -20 \log_{10} \frac{\omega_2 \tau}{\omega_1 \tau} \\ &= -20 \log_{10} 10 \\ &= -20 \text{ dB/década}\end{aligned}$$

- Para $\omega_2 = 2\omega_1 \Rightarrow -6 \text{ dB/oitava}$

Alternativamente ($\omega_2 = 10\omega_1$)

$$(-\log_{10} \omega_2 \tau) - (-\log_{10} \omega_1 \tau) = -\log_{10} \left(\frac{10\omega_1 \tau}{\omega_1 \tau} \right) = -\log_{10} 10 = -1/\text{década}$$

Função transferência de atraso



② Função de transferência de avanço

$$G(s) = 1 + \beta s, \quad G(j\omega) = 1 + j\omega\beta$$

$$RA = |G(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega\beta)^2}$$

$$\phi = \text{tg}^{-1}(\omega\beta)$$

$$\log_{10} |G(j\omega)| = \log_{10} |1| + \frac{1}{2} \log_{10} (1 + (\omega\beta)^2)$$

Assíntotas

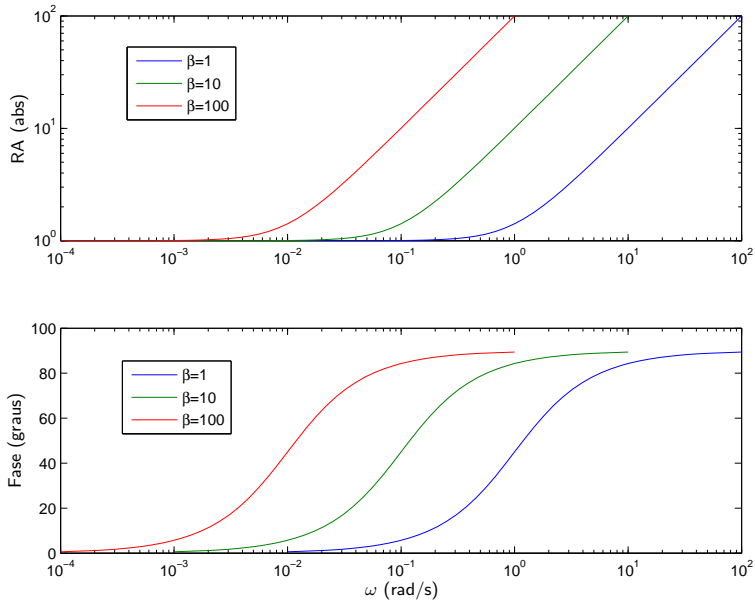
$$\omega \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \log_{10} |G(j\omega)| = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \log_{10} |G(j\omega)| = \log_{10}(\omega\beta)$$

Frequência de corte

$$\omega_c = \frac{1}{\beta}$$

Função de transferência de avanço



3 Pólo na origem

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \\ \phi = -90^\circ \end{cases} \Rightarrow \log_{10} |G(j\omega)| = -\log_{10} \omega$$

Assíntotas:

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0 &\Rightarrow |G(j\omega)| \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \infty &\Rightarrow |G(j\omega)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

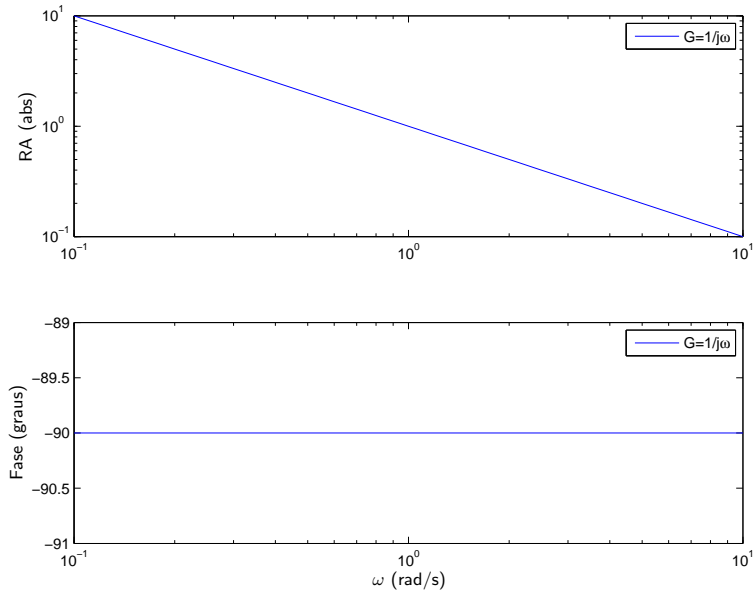
4 Zero na origem

$$G(j\omega) = j\omega \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \omega \\ \phi = +90^\circ \end{cases} \Rightarrow \log_{10} |G(j\omega)| = +\log_{10} \omega$$

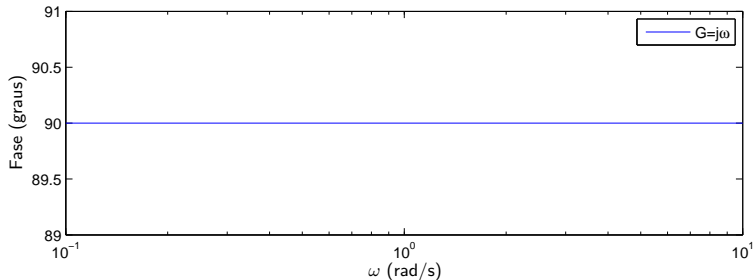
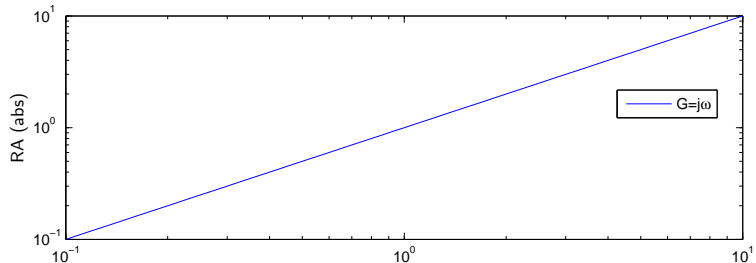
Assíntotas:

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0 &\Rightarrow |G(j\omega)| \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty &\Rightarrow |G(j\omega)| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Função de transferência: integrador (pólo na origem)



Função de transferência: derivador (zero na origem)



5 Atraso Puro

$$G(s) = e^{-\theta s}, \quad G(j\omega) = e^{-j\omega\theta} = \cos(\omega\theta) - j\text{sen}(\omega\theta)$$

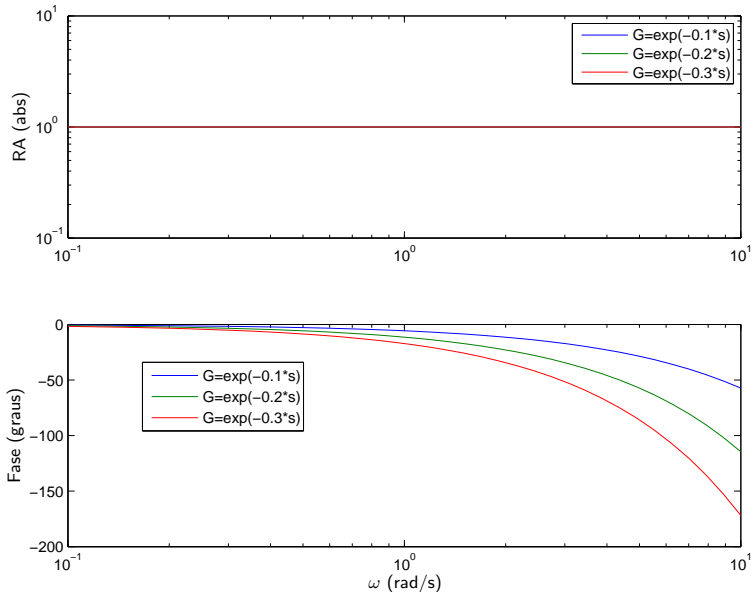
$$RA = |G(j\omega)| = 1$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left(-\frac{\text{sen}(\omega\theta)}{\cos(\omega\theta)} \right) = -\omega\theta \quad (\text{atraso de fase pois } \phi < 0)$$

Lembrando

$$\text{Em graus: } \phi [\text{graus}] = -\theta [\text{seg}] \times \omega [\text{rad/s}] \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

Função de transferência: atraso puro



6 Sistema de 2ª ordem

- Sistema sobreamortecido ou criticamente amortecido (pólos reais)

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad \rightarrow \quad |G(j\omega)| = |K| \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_1)^2}} \right| \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_2)^2}} \right|$$

Assíntotas

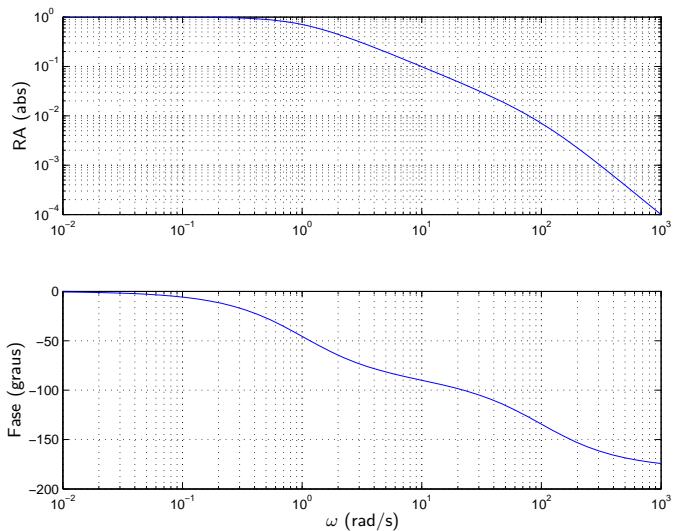
$$\omega \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \log_{10} |K|, \quad \phi = 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \log_{10} |K| - \log_{10}(\omega\tau_1) - \log_{10}(\omega\tau_2), \quad \phi = -180^\circ$$

Frequência de corte

$$\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1} \quad \text{e} \quad \omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2}$$

Função de transferência: sistema de 2a ordem (pólos reais)



Frequências de corte em $1/\tau_1 = 1$ rad/s e $1/\tau_2 = 100$ rad/s.

6 Sistema de 2ª ordem

- Sistema subamortecido (pólos complexos conjugados)

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}, \quad G(j\omega) = \frac{K}{1 - (\omega\tau)^2 + j2\omega\tau\zeta}$$

$$RA = |G(j\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{(1 - (\omega\tau)^2)^2 + (2\omega\tau\zeta)^2}}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = \text{tg}^{-1} \left(-\frac{2\omega\tau\zeta}{1 - (\omega\tau)^2} \right)$$

Assíntotas

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \log_{10} |K|, \quad \phi = 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \log_{10} |K| - 2 \log_{10}(\omega\tau), \quad \phi = -180^\circ$$

6 Sistema de 2ª ordem

Frequência de corte

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} \quad \text{ou} \quad \omega_c = \omega_n$$

• Observe que

$$p_{1,2} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm j \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} \Rightarrow |p_{1,2}| = \frac{1}{\tau} = \omega_n$$

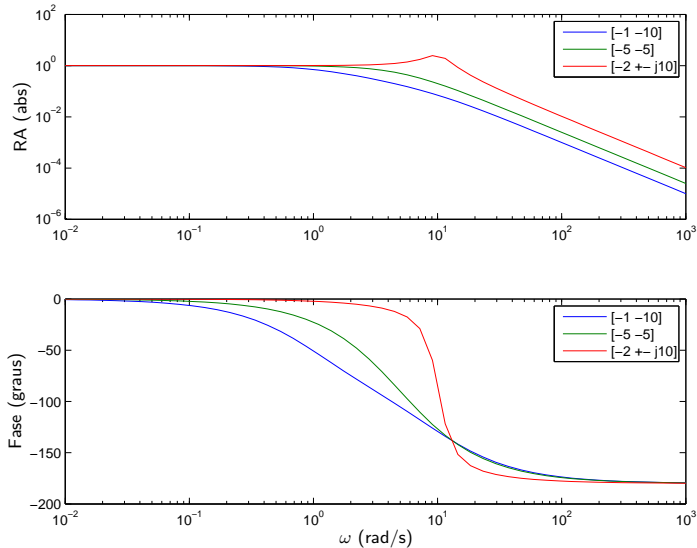
Frequência de ressonância: $|G(j\omega)|$ é máximo

$$\omega_r = \frac{1}{\tau} \sqrt{1-2\zeta^2} = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$$

Substituindo,

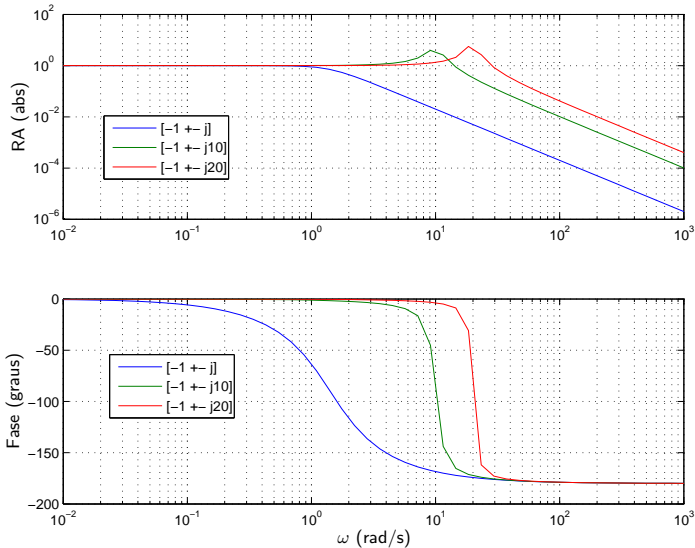
$$M_w = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Função de transferência: sistema de 2a ordem



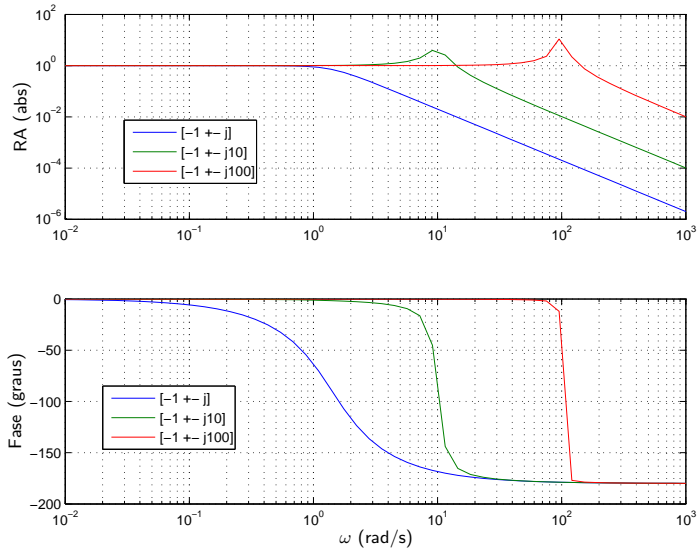
Legenda: localização dos pólos.

Função de transferência: sistema de 2a ordem



Legenda: localização dos pólos.

Função de transferência: sistema de 2a ordem



Legenda: localização dos pólos.

Função de transferência genérica I

$$G(s) = \frac{K(\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} e^{-\theta s}$$

$$G(j\omega) = \frac{|K| |(\beta \cdot j\omega + 1)| e^{j\phi_a}}{|(\tau_1 \cdot j\omega + 1)| e^{j\phi_b} |(\tau_2 \cdot j\omega + 1)| e^{j\phi_c} |(\tau_3 \cdot j\omega + 1)| e^{j\phi_d}} e^{-\theta \cdot j\omega}$$

$$RA = |G(j\omega)| = \frac{|K| |(\beta \cdot j\omega + 1)|}{|(\tau_1 \cdot j\omega + 1)| |(\tau_2 \cdot j\omega + 1)| |(\tau_3 \cdot j\omega + 1)|}$$

$$\phi_{\text{total}} = \phi_a(\omega) - (\phi_b(\omega) + \phi_c(\omega) + \phi_d(\omega) + \omega\theta)$$

Função de transferência genérica II

$$\begin{aligned}G(j\omega) &= \frac{K \prod_i (1 + j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \prod_m (1 + j\omega\tau_m) \prod_l (\tau_l^2 s^2 + 2\zeta_l \tau_l s + 1)} \\ &= \frac{KG_1(j\omega) \cdots G_m(j\omega)}{G_a(j\omega) \cdots G_n(j\omega)} = KG_1 \cdots G_m \cdot G'_a \cdots G'_n\end{aligned}$$

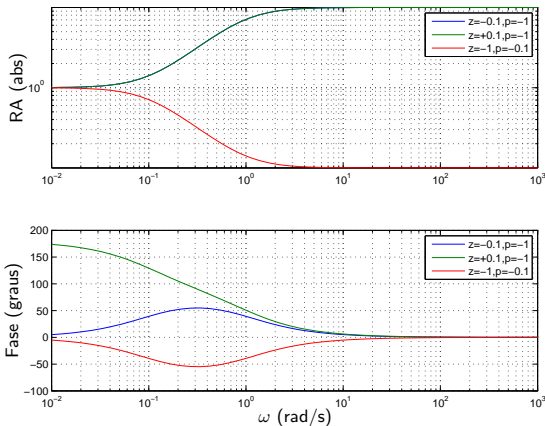
$$\log_{10}(|G(j\omega)|) = \log_{10} K + \log_{10} |G_1| + \cdots + \log_{10} |G_m| + \log_{10} |G'_a| + \cdots + \log_{10} |G'_n|$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi'_a + \cdots + \phi'_n$$

Diagrama de Bode

Sistema de fase não-mínima (atraso; polos ou zeros no SPD)

$$G_1 = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\tau} \text{ (mínima)}, \quad G_2 = \frac{-1 + j\omega T}{1 + j\omega\tau} \text{ (não-mínima)}, \quad 0 < \tau < T$$



- Considere a função de transferência

$$G(s) = \frac{K(s+1)e^{-t_0s}}{s(2s+1)(3s+1)}$$

$$\frac{RA}{K} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega\sqrt{4\omega^2 + 1}\sqrt{9\omega^2 + 1}}$$

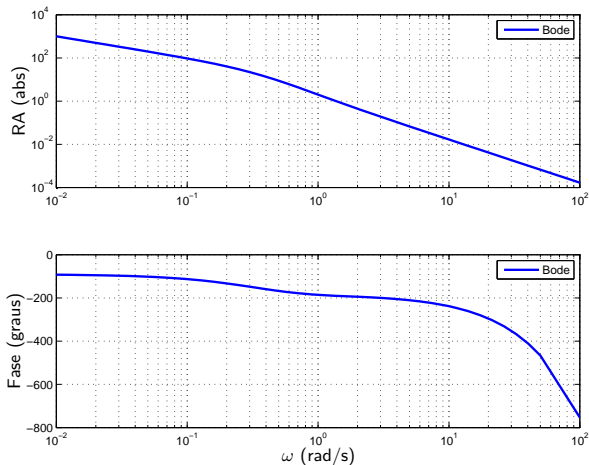
$$\log_{10} \frac{RA}{K} = \frac{1}{2} \log_{10}(\omega^2 + 1) - \log_{10}(\omega) - \frac{1}{2} \log_{10}(4\omega^2 + 1) - \frac{1}{2} \log_{10}(9\omega^2 + 1)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1}(\omega) - \omega t_0 - \frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1}(2\omega) - \text{tg}^{-1}(3\omega)$$

Diagrama de Bode

- Diagrama de Bode de

$$G(s) = \frac{10(s+1)e^{-0.1s}}{s(2s+1)(3s+1)}$$



Exemplo de Traçado do Diagrama de Bode

- O diagrama de Bode de uma FT, $G(s)$, composta de vários polos e zeros é obtido adicionando-se a curva de cada polo e zero individualmente
- Considere a FT

$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j0,1\omega)}{j\omega(1 + j0,5\omega) \left[1 + j0,6 \left(\frac{\omega}{50} \right) + \left(\frac{j\omega}{50} \right)^2 \right]}$$

- ↪ Ganho constante $K = 5$ ($20 \log_{10} 5 = 14\text{dB}$) ①
- ↪ Um polo na origem ②, um polo em $\omega = 2\text{rad/s}$ ③, um par de polos complexos em $\omega = \omega_n = 50\text{rad/s}$ ⑤
- ↪ Um zero em $\omega = 10\text{rad/s}$ ④

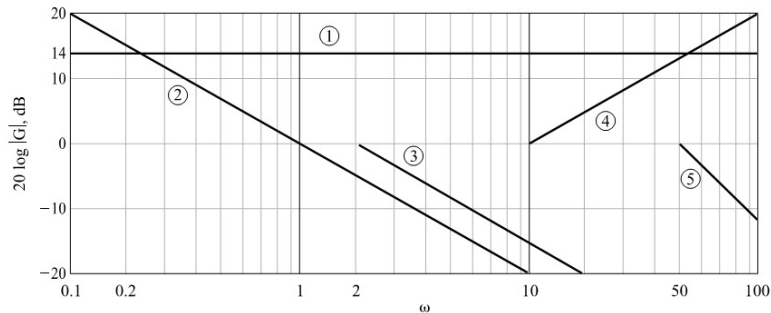
Exemplo de Traçado do Diagrama de Bode

● Assíntotas do ganho

↪ Ganho constante $K = 5$ ($20 \log_{10} 5 = 14\text{dB}$) ①

↪ Um polo na origem ②, um polo em $\omega = 2\text{rad/s}$ ③, um par de polos complexos em $\omega = \omega_n = 50\text{rad/s}$ ⑤

↪ Um zero em $\omega = 10\text{rad/s}$ ④



Exemplo de Traçado do Diagrama de Bode

● Assíntotas da fase

↪ Ganho constante $K = 5$ ($20 \log_{10} 5 = 14\text{dB}$) ①

↪ Um polo na origem ②, um polo em $\omega = 2\text{rad/s}$ ③, um par de polos complexos em $\omega = \omega_n = 50\text{rad/s}$ ⑤

↪ Um zero em $\omega = 10\text{rad/s}$ ④

