107484 – Controle de Processos

Aula: Estabilidade e Critério de Routh

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB

2021

Sumário

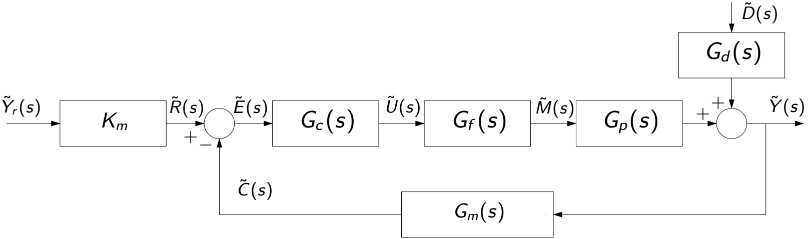

Diagrama de blocos do sistema em malha fechada em que $K_m = G_m(0)$.

- Função de transferência de malha fechada

$$\frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{Y}_r(s)} = \frac{K_m G_c(s) G_f(s) G_p(s)}{1 + G_c(s) G_f(s) G_p(s) G_m(s)} = \frac{G(s)}{1 + G_{MA}(s)}$$

Estabilidade

- Reescrevendo a função de transferência de malha fechada em termos de pólos e zeros

$$\frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{Y}_r(s)} = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}, \qquad n \geq m$$

- Para uma entrada degrau:

$$\tilde{Y}(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \dots + + \frac{A_n}{s-p_n}$$
$$\tilde{y}(t) = A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + + A_n e^{p_n t}$$

Estabilidade

O sistema é estável se, e somente se, $\mathbb{R}\{p_i\} < 0$, $i = 1, \cdot, n$

BIBO Estabilidade

- Um sistema é dito apresentar BIBO-estabilidade (*bounded input - bounded output*) se qualquer entrada limitada em amplitude resultar em uma saída limitada em amplitude, independente do estado interno do sistema.
- Sejam $u(t)$ a entrada do sistema, $y(t)$ sua saída e $g(t)$ sua resposta ao impulso, então

$$Y(s) = G(s)U(s) \qquad \Leftrightarrow \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

- Para a entrada limitada $|u(t)| \leq M < \infty$,

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)| d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| d\tau$$

- Logo, o sistema é BIBO-estável se, e somente se,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| d\tau < \infty$$

ou seja, se todos os pólos estiverem no semiplano esquerdo.

Estabilidade no espaço de estados

Estabilidade interna assintótica ($x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$)

Para o sistema com resposta a entrada nula $\dot{x}(t) = Ax(t)$ e condição inicial não nula x_0. O sistema é assintoticamente estável se os autovalores de A têm parte real negativa.

- Relembrando: a resposta de um sistema com entrada nula $\dot{x}(t) = Ax(t)$ para uma condição inicial $x(0)$ é dada por

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

- A exponencial de matriz e^{At} tem termos que são combinações lineares de seus autovalores e respectivas derivadas. Se A tem um autovalor λ_1 com índice n_1, então as entradas de e^{At} são combinações lineares de $\{e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}\}$.

- Obs.: A estabilidade interna sempre implica em estabilidade entrada-saída (BIBO)

- Obs.: A BIBO estabilidade é definida para a resposta ao estado inicial nulo.

Estabilidade no espaço de estados

- Seja um sistema linear $G(s) = Y(s)/U(s)$ com realização mínima

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad x_0 = x(0)$$

- Equação característica de $G(s)$

$$\det(sI - A) = 0$$

- Autovalores de A

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Para realizações controláveis e observáveis (realização mínima)

- Polos de $G(s)$ são os autovalores de A
- Estabilidade entrada-saída (BIBO) $\Leftrightarrow$ estabilidade interna

Estabilidade

- Pólos são as raízes da equação característica

$$1 + G_{MA}(s) = 0$$

Formas de análise de estabilidade

- Critério de estabilidade de Routh
- Método de Substituição Direta
- Diagrama de lugar das raízes
- Critérios no domínio da frequência:
  - Diagrama de Bode (MF/MG)
  - Critério de estabilidade de Nyquist

Sumário

Critério de Estabilidade de Routh

- No passado o cálculo das raízes de um polinômio de ordem alta era complexo, mas hoje em dia é facilmente resolvido por métodos numéricos

- No entanto, quando os coeficientes são incógnitas, é necessário a manipulação algébrica das incógnitas

- Seja a equação característica do sistema em malha fechada

$$1 + G_{MA}(s) = (s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n) = 0$$

- Reescrevendo

$$1 + G_{MA}(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0, \qquad a_0 > 0$$

Condição de estabilidade necessária mas não suficiente

Se algum dos coeficientes $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ for zero ou negativo, então há pelo menos uma raíz imaginária e/ou com parte real positiva e o sistema é instável.

Critério de Estabilidade de Routh

- Se todos os coeficientes são positivos, ou seja, $a_0, a_1, \ldots, a_n \geq 0$, organizá-los no seguinte arranjo tabular:

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
2 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
3 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & \\
4 & B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & \\
5 & C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
n+1 & W_1 & W_2 & \cdots & &
\end{array}
$$

$$A_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad A_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad A_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \quad \ldots$$

$$B_1 = \frac{A_1 a_3 - a_1 A_2}{A_1} \qquad B_2 = \frac{A_1 a_5 - a_1 A_3}{A_1} \ldots$$

$$C_1 = \frac{B_1 A_2 - A_1 B_2}{B_1} \qquad C_2 = \frac{B_1 A_3 - A_1 B_3}{B_1} \ldots$$

Critério de Estabilidade de Routh

Critério

O número de raízes da equação característica com partes reais positivas é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna do arranjo tabular.

Resumo

A condição **necessária e suficiente** para a estabilidade (raízes da equação característica no semiplano esquerdo) é que todos os coeficientes da equação característica e todos os termos da primeira coluna do arranjo tabular tenham o mesmo sinal.

Exemplo 1

- Seja a função de transferência de malha fechada

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^4+2s^3+3s^2+4s+5}$$

- Equação característica: $p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$
- O arranjo tabular dos coeficientes se torna

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
s^2 & \dfrac{2\cdot 3 - 1\cdot 4}{2} = 1 & \dfrac{2\cdot 5 - 1\cdot 0}{2} = 5 & 0 \\
s^1 & \dfrac{1\cdot 4 - 2\cdot 5}{1} = -6 & 0 & \\
s^0 & \dfrac{-6\cdot 5 - 1\cdot 0}{-6} = 5 & &
\end{array}$$

- Ocorrem duas mudanças de sinal ($1 \to -6$ e $-6 \to 5$), logo há dois pólos no semiplano direito do plano-s (parte real positiva) e o sistema é instável.

Exemplo 2

- Considere-se um sistema com a função de transferência de malha fechada

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

- A equação característica é

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

- O arranjo tabular dos coeficientes se torna

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 3 & K \\ s^3 & 3 & 2 & 0 \\ s^2 & 7/3 & K & \\ s^1 & 2 - 9/7K & 0 & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

Exemplo 2

- Para estabilidade, K deve ser positivo, e todos os coeficientes da primeira coluna devem ser positivos. Portanto,

$$\frac{14}{9} > K > 0$$

Quando $K = {}^{14}/_{9}$, o sistema se torna oscilatório e, matematicamente, a oscilação é mantida com amplitude constante.

Exemplo 3

- Considere o sistema de controle em malha fechada com a seguinte equação característica

$$s^3 + 2s^2 + (2 + K_c)s + \frac{K_c}{\tau_I} = 0$$

- A matriz de Routh correspondente é dada por

$$\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 2 + K_c \\
s^2 & 2 & \dfrac{K_c}{\tau_I} \\
s^1 & \dfrac{2(2 + K_c) - {}^{K_c}/_{\tau_I}}{2} & 0 \\
s^0 & \dfrac{K_c}{\tau_I} &
\end{array}$$

Exemplo 3

- Se $K_c = 100$ e $\tau_I = 0,1$, o terceiro elemento da primeira coluna se torna $-398 < 0$, o que significa que o sistema é instável. Temos duas mudanças de sinal nos elementos da primeira coluna. Assim, temos duas raízes no SPD.
- Se $K_c = 10$ e $\tau_I = 0,5$, o terceiro elemento é igual a $+2 > 0$ e o sistema é estável uma vez que todos os elementos da primeira coluna são positivos.
- Em geral, o sistema é estável se K_c e τ_I satisfazem a condição

$$2(2 + K_c) > \frac{K_c}{\tau_I}$$

- Se $\tau_I = 0,1$, o valor de K_c que faz com que o terceiro elemento seja zero é

$$K_c = 0,5$$

e constitui a condição crítica para estabilidade do sistema de controle PI em malha fechada.

Critério de Routh: casos especiais

Quando ocorre a presença de zeros na primeira coluna do arranjo tabular do critério de Routh é necessário os seguintes procedimentos.

1. Linha com primeiro elemento igual a zero e termos restantes não nulos: substitui-se o zero por uma variável $\epsilon > 0$ e monta-se a tabela em termos de ϵ. A análise de estabilidade pelo critério de Routh faz-se com $\epsilon \to 0$.
   - Se não houver mudança de sinal ao fazer $\epsilon \to 0$ então há um par de raízes imaginárias.
   - Se houver mudança de sinal ao fazer $\epsilon \to 0$ então há raízes no semiplano direito.

Exemplo: $p(s) = s^3 - 3s + 2$

$$
\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & -3 \\
s^2 & 0 \to \epsilon & 2 \\
s^1 & -3 - \dfrac{2}{\epsilon} & 0 \\
s^0 & 2 &
\end{array}
$$

Ocorreram duas mudanças de sinal, ou seja, há duas raízes com parte real positiva (raízes de $p(s)$: $+1$, $+1$, -2).

Critério de Routh: casos especiais

2. Linha com todos os elementos nulos: há raízes de mesmo valor, radialmente opostas, no plano s: $(s+p)(s-p)$ ou $(s+j\omega)(s-j\omega)$. Construir um polinômio auxiliar cujos coeficientes são os elementos da linha acima a linha de zeros. Utilizar os coeficientes da derivada desse polinômio na próxima linha.

Exemplo: $p(s) = s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12$

$$
\begin{array}{cccccl}
s^5 & 1 & 11 & 28 & & \\
s^4 & 5 & 23 & 12 & & \\
s^3 & 6.4 & 25.6 & 0 & & \\
s^2 & 3 & 12 & 0 & & \\
s^1 & 0 & 0 & 0 & \Rightarrow & Q(s) = 3s^2 + 12 \\
s^1(novo) & 6 & 0 & 0 & \Leftarrow & dQ(s)/ds = 6s \\
s^0 & 12 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

- As raízes de igual valor e radialmente opostas podem ser determinadas resolvendo o polinômio auxiliar $Q(s) = 0$, que é sempre par. No exemplo acima $3s^2 + 12 = 0$ tem raízes $+j2$ e $-j2$.

Estabilidade relativa

- Verificar se os polos tem parte real negativa também é chamado de estabilidade absoluta.

- Entretanto, pode-se desejar saber uma "medida de estabilidade", ou seja, o quão afastado os polos estão do eixo imaginário implicando o sistema ser relativamente mais ou menos estável. Esse conceito é chamado de estabilidade relativa.

Análise de estabilidade relativa

Para verificar se as raízes da equação característica estão a esquerda da linha vertical $s = -\sigma$ basta aplicar o critério de Routh na equação característica em termos de $\hat{s}$ pela mudança de variáveis

$$s = \hat{s} - \sigma$$

Estabilidade relativa

Exemplo de estabilidade relativa

Seja o polinômio característico

$$p(s) = s^4 + 14s^3 + 71s^2 + 154s + K$$

Verifique a faixa de valores de K tal que o sistema seja estável (estabilidade absoluta) e tal que as raízes estejam à esquerda da reta $s = -1$ (estabilidade relativa).

- Fazendo o arranjo tabular

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 71 & K \\ s^3 & 14 & 154 & 0 \\ s^2 & 60 & K & \\ s^1 & A_0 & 0 & \\ s^0 & K & & \end{array} \qquad A_0 = 154 - \frac{7}{30}K > 0$$

verifica-se que para se ter raízes com parte real negativa é necessário $0 < K < 660$.

Estabilidade relativa

- Para saber qual a faixa de valores de K tal que as raízes tenham parte real menor do que -1 define-se um novo eixo vertical como $\hat{s} = s + 1$, ou seja, realizar-se a mudança de variáveis $s = \hat{s} - 1$ obtendo

$$\begin{aligned} p(\hat{s}) &= (\hat{s}-1)^4 + 14(\hat{s}-1)^3 + 71(\hat{s}-1)^2 + 154(\hat{s}-1) + K \\ &= \hat{s}^4 + 10\hat{s}^3 + 35\hat{s}^2 + 50\hat{s} + K - 96 \end{aligned}$$

- Fazendo o novo arranjo tabular

$$\begin{array}{cccc} \hat{s}^4 & 1 & 35 & K-96 \\ \hat{s}^3 & 10 & 50 & 0 \\ \hat{s}^2 & 30 & K-96 & \\ \hat{s}^1 & A_1 & 0 & \\ \hat{s}^0 & K-96 & & \end{array} \qquad A_1 = 82 - \frac{K}{3} > 0$$

verifica-se que para se ter raízes (polos) com parte real menor que -1 é necessário $96 < K < 246$.

Sumário

Método de Substituição Direta

- Raízes passam pelo eixo imaginário antes da instabilidade com variação dos parâmetros:

$$p_{1,2} = \pm j\omega_u$$

produzindo oscilações persistente

$$y(t) = b\ sen(\omega_u t + \theta)$$

- ω_u: frequência última $[{}^{rad}/_{s}]$

$$P_u = \frac{2\pi}{\omega_u} \quad \text{(período último } [s]\text{)}$$

- K_u: ganho último $\Rightarrow$ ocorre oscilação $\quad p_{1,2} = \pm j\omega_u$

Método de Substituição Direta

Método para achar o maior ganho possível antes da instabilidade (ganho último K_u) e a frequência de oscilação ω_u quando os pólos de malha fechada estão no eixo imaginário.

Método de Substituição Direta

Método

1. Substituir na equação característica do sistema MF

$$s = j\omega_u$$

2. Achar ω_u e K_u tal que $\begin{cases} \text{Parte real} = 0 \\ \text{Parte imaginária} = 0 \end{cases}$

- Exemplo: Processo controle temperatura

$$1 + G_m(s)G_p(s)G_f(s)G_c(s) = 0$$

$$1 + \frac{1}{10s+1} \cdot \frac{50}{30s+1} \cdot \frac{0,0016}{3s+1} \cdot K_c = 0$$

$$(10s+1)(30s+1)(3s+1) + 0,80K_c = 0$$

$$900s^3 + 420s^2 + 43s + 1 + 0,80K_c = 0$$

Método de Substituição Direta

- Fazendo $s = j\omega_u$ e $K_c = K_u$

$$900j^3\omega_u^3 + 420j^2\omega_u^2 + 43j\omega_u + 1 + 0,80K_u = 0$$

$$(-420\omega_u^2 + 1 + 0,80K_u) + j(-900\omega_u^3 + 43\omega_u) = 0 + j0$$

$$\begin{cases} -420\omega_u^2 + 1 + 0,80K_u = 0 \\ -900\omega_u^3 + 43\omega_u = 0 \end{cases}$$

Soluções:

- $\omega_u = 0,\ K_u = -1,25$ (Obs.: $0,8 \cdot 1,25 = 1$, cruzamento ocorre em $s = 0$, ação reversa), e
- $\omega_u = 0,2186\ ^{\text{rad}}/_{\text{s}},\ K_u = 23,8$

$$P_u = \frac{2\pi}{0,2186} = 28,7 \text{ s}$$

Sumário

Análise de estabilidade de sistemas com atraso no tempo

- Análise via critério de Routh ou Substituição direta $\rightsquigarrow$ usar alguma aproximação.

Por exemplo,

$$e^{-\theta s} = \frac{1 - \dfrac{\theta}{2}s}{1 + \dfrac{\theta}{2}s} \qquad \text{(Aprox. Padé 2ª ordem)}$$

- Obs.: Efeito $\uparrow \theta \quad \Rightarrow \quad \downarrow K_u$ rapidamente ($\approx \ \uparrow \tau_{\text{não-dominantes da malha}}$)