

107484 – Controle de Processos

Aula: Atraso no tempo e obtenção de modelos empíricos

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB

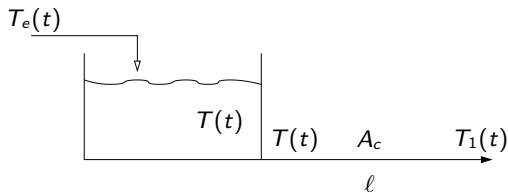


1º Semestre 2021

- 1 Tempo morto (atraso no tempo)
- 2 Modelos empíricos
- 3 Aproximações de funções de transferência de alta ordem
- 4 Obtenção de modelo empírico

Sistemas com atraso

- Considere o fluxo de um fluido em uma tubulação de seção transversal A_c e comprimento ℓ



- Tempo de propagação entre $T(t)$ e $T_1(t)$ considerando uma vazão volumétrica $f(t)$

$$\Delta t = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}} = \frac{\ell}{f(t)/A_c} = \frac{A_c \ell}{f(t)}$$

- Da propriedade da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{y(t - t_0)\} = e^{-t_0 s} \mathcal{L}\{y(t)\}$$

Aproximação do atraso por funções racionais

- O sistema com atraso

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x_d(t - \theta), u(t)) \quad \text{ou} \quad G_\theta(s) = G(s)e^{-\theta s}$$

não é uma função de transferência racional (não pode ser expressa como o quociente de dois polinômios).

- Observações

- Processos de 1^a ordem em cascata \rightarrow comportamento similar
- Relação $t_o/\tau \rightarrow$ grau de dificuldade/complexidade no controle
- $G_0(s) = G(s)e^{-\theta s}$ é uma FT não racional \rightarrow dificuldade na análise

Métodos de aproximação do atraso por uma função racional

- 1 Expansão em série de Taylor em $s = 0$
- 2 Aproximação por Padé

Expansão em série de Taylor de $e^{-\theta s}$ em torno de $s = 0$

$$e^{-\theta s} = 1 - \theta s + \frac{(\theta s)^2}{2!} - \frac{(\theta s)^3}{3!} + \frac{(\theta s)^4}{4!} \dots$$

ou

$$e^{-\theta s} = \frac{1}{1 + \theta s + \frac{(\theta s)^2}{2!} + \frac{(\theta s)^3}{3!} + \frac{(\theta s)^4}{4!} \dots}$$

- Desprezando os termos maiores e iguais de 2^a ordem

$$e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s \quad (\text{zero em } s = \frac{1}{\theta}) \quad (1)$$

ou

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1}{1 + \theta s} \quad (\text{pólo em } s = -\frac{1}{\theta}) \quad (2)$$

Aproximação de Padé

• Consiste em obter uma função aproximada $G_{m,n}(s)$ de $G(s)$ de menor ordem que exiba uma resposta temporal semelhante. Seja

$$G_{m,n}(s) \triangleq G_{DC} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1}, \quad n \geq m \quad (3)$$

• As funções $G_{m,n}(s)$ de $G(s)$ e suas derivadas sucessivas em s , no ponto $s = 0$, devem ser iguais, ou seja, $G^{(n)}(0) = G_{m,n}^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$G(0) = G_{m,n}(0), \quad G'(0) = G'_{m,n}(0), \quad G''(0) = G''_{m,n}(0), \quad \dots \quad (4)$$

Aproximação por Padé

- Seja

$$G(s) = e^{-\theta s}$$

- Aproximação

$$G_{0,1}(s) = \frac{1}{\theta s + 1}, \quad G_{1,1}(s) = \frac{-\theta s + 2}{\theta s + 2} = \frac{1 - \theta/2s}{1 + \theta/2s}$$

$$G_{1,2}(s) = \frac{-2\theta s + 6}{\theta^2 s^2 + 4\theta s + 6}, \quad G_{2,2}(s) = \frac{\theta^2 s^2 - 6\theta s + 12}{\theta^2 s^2 + 6\theta s + 12}$$

$$G_{3,3}(s) = \frac{-\theta^3 s^3 + 12\theta^2 s^2 - 60\theta s + 120}{\theta^3 s^3 + 12\theta^2 s^2 + 60\theta s + 120}$$

- No *Matlab*:

```
[num,den] = pade(theta,ordem)
printsys(num,den,'s')
```

- 1 Tempo morto (atraso no tempo)
- 2 Modelos empíricos
- 3 Aproximações de funções de transferência de alta ordem
- 4 Obtenção de modelo empírico

Sistemas de 1^a e 2^a ordem mais atraso

A maioria das dinâmicas dos processos industriais podem ser aproximadas por sistemas de 1^a e 2^a ordem mais atraso no tempo (tempo morto):

- FOPTD (*first order plus time delay*): 1^a ordem + tempo morto

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}$$

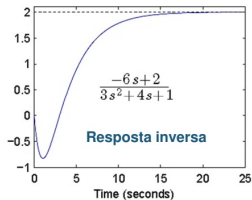
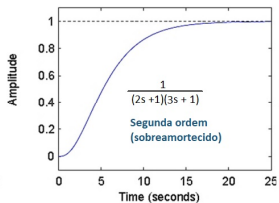
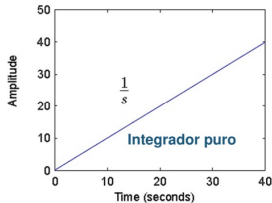
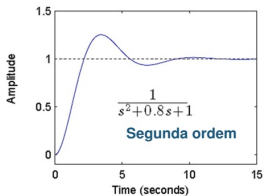
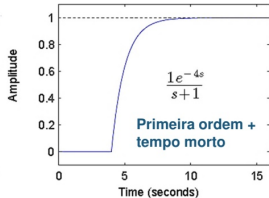
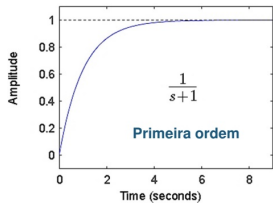
- SOPTD (*second order plus time delay*): 2^a ordem + tempo morto

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-\theta s} \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} e^{-\theta s}$$

- SOPTDLD (*SOPTD with lead*): 2^a ordem + tempo morto + zero

$$G(s) = \frac{K(\tau_3 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-\theta s} \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{K(\tau_3 s + 1)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} e^{-\theta s}$$

Respostas típicas ao degrau unitário



- 1 Tempo morto (atraso no tempo)
- 2 Modelos empíricos
- 3 Aproximações de funções de transferência de alta ordem**
- 4 Obtenção de modelo empírico

I - Desprezar pólos menos significativos

Exemplo:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+30)} = \frac{K/60}{s(s/2+1)(s/30+1)}$$

↪

$$\tilde{G}(s) = \frac{K/30}{s(s+2)}$$

II - Aproximação de pólos e zeros por atrasos no tempo

- Expansão em série de Taylor de $e^{-\theta s}$ em torno de $s = 0$:

$$e^{-\theta s} = 1 - \theta s + \frac{(\theta s)^2}{2!} - \frac{(\theta s)^3}{3!} + \frac{(\theta s)^4}{4!} \dots$$

- Desprezando os termos maiores e iguais de 2ª ordem

$$e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s \quad (\text{zero em } s = \frac{1}{\theta})$$

ou

$$e^{-\theta s} = \frac{1}{e^{\theta s}} \approx \frac{1}{1 + \theta s} \quad (\text{pólo em } s = -\frac{1}{\theta})$$

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{K(-0.1s + 1)}{(5s + 1)(3s + 1)(0.5s + 1)} \rightsquigarrow \tilde{G}(s) = \frac{K}{5s + 1} e^{-3.6s}$$

III - Método de Skogestad [Skogestad, 2003]

● Metade da maior constante de tempo desprezada é adicionada ao atraso e metade à menor constante de tempo retida; demais termos aproximados por atraso ($e^{-\theta s}$).

● Exemplo:

$$G(s) = \frac{K(-0.1s + 1)}{(5s + 1)(3s + 1)(0.5s + 1)} \rightsquigarrow \tilde{G}(s) = \frac{K}{6.5s + 1} e^{-2.1s}$$

IV - Aproximação por Padé

● Utilização de (3)-(4) para aproximação da função de transferência.

● Exemplo:

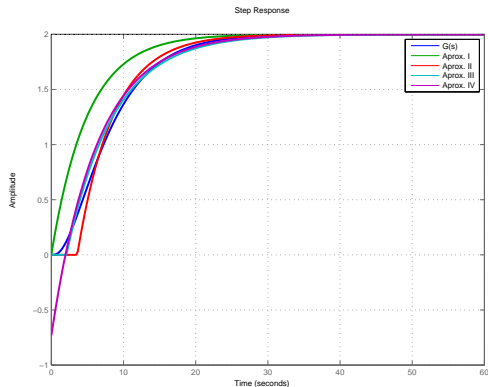
$$G(s) = \frac{2}{(10s + 1)(s + 1)} \rightsquigarrow G_{1,1}(s) = \frac{2(-0.909s + 1)}{10.09s + 1}$$

Aproximações de funções de transferência de alta ordem

- Comparação das aproximações de

$$G(s) = \frac{2(-0.1s + 1)}{(5s + 1)(3s + 1)(0.5s + 1)}$$

por um sistema de 1^a ordem com tempo morto (aprox. II e III) ou com um zero (aprox. IV $\rightsquigarrow G_{1,1}(s) = \frac{-2.30s + 1}{6.29s + 1}$).



- 1 Tempo morto (atraso no tempo)
- 2 Modelos empíricos
- 3 Aproximações de funções de transferência de alta ordem
- 4 Obtenção de modelo empírico**

- Modelos obtidos através de um conjunto de dados (resposta do processo). Principais métodos utilizados no 'chão de fábrica':
 - 1 Resposta ao degrau (curva de reação do processo em malha aberta)
 - 2 Método dos mínimos quadrados

Resposta ao degrau

Aproximação por $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}$. Obtenção de K , τ e θ :

- 1 Método gráfico da reta tangente ao ponto de máxima variação
- 2 Uso de 2 pontos (método de Broida)
- 3 Por meio da definição de constante de tempo (63.2%)

Aproximação por FOPDT via resposta ao degrau

$$\frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{U}(s)} = G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}, \quad \tilde{U}(s) = \frac{\Delta u}{s}$$

$$\tilde{y}(t) = K\Delta u \tilde{u}(t - \theta) \left(1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}}\right), \quad \tilde{u}(t) : \text{degrau unitário}$$

Método da reta tangente

- Seja a aplicação de um degrau de amplitude Δu

$$t_1 = \theta$$

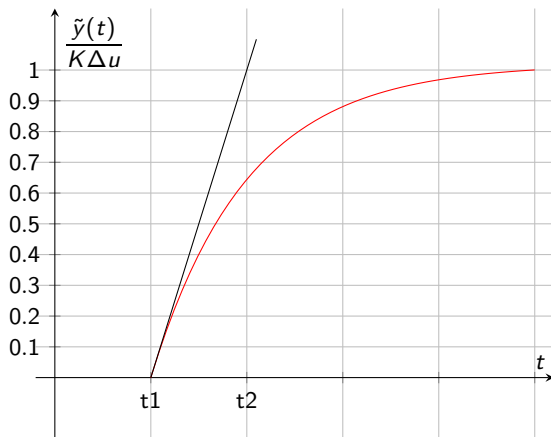
$$t_2 = \theta + \tau$$

$$\text{Ganho: } K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\tilde{y}(\infty)}{\tilde{u}(\infty)}$$

$$\tilde{y}(t) = K\Delta u \tilde{u}(t - \theta) \left(1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}}\right)$$

$$\left. \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \right|_{t=\theta} = \frac{K\Delta u}{\tau} = \frac{\Delta y}{\tau}$$

Identificação pela reta tangente



Resposta ao degrau de amplitude Δu .

Método da reta tangente

Processos integradores ou instáveis

Deseja-se aproximar o processo por

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{s}$$

Resposta ao degrau de amplitude Δu :

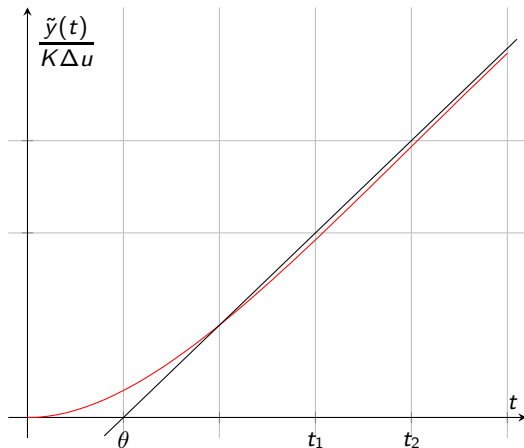
$$y(t) = K\Delta u u(t - \theta) \cdot (t - \theta)$$

Para $t_2 > t_1 > \theta$, $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$y(t_2) - y(t_1) = K\Delta u \Delta t$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

Identificação pela reta tangente



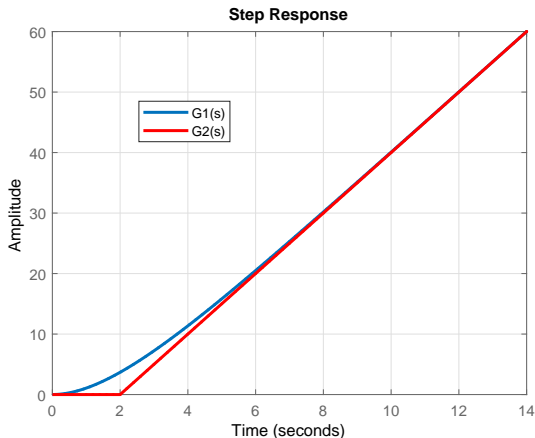
Resposta ao degrau de amplitude Δu .

Identificação pela reta tangente

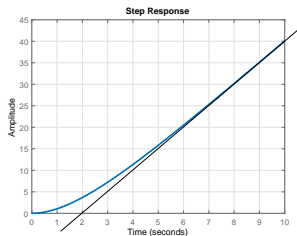
- Seja as funções de transferência

$$G_1(s) = \frac{5}{s(2s + 1)}, \quad G_2(s) = \frac{5e^{-2s}}{s}$$

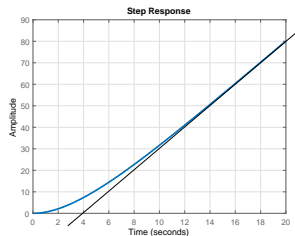
- Resposta ao degrau unitário:



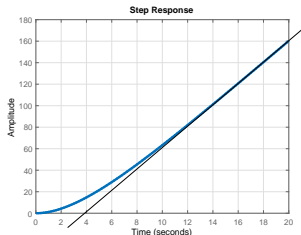
Polo na origem



(a)



(b)



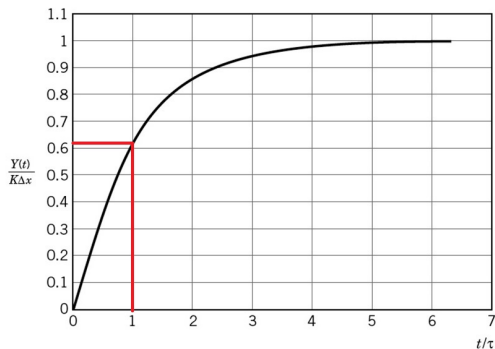
(c)

$$(a) \quad G(s) = \frac{5}{s(2s + 1)}$$

$$(b) \quad G(s) = \frac{5}{s(4s + 1)}$$

$$(c) \quad G(s) = \frac{10}{s(4s + 1)}$$

Identificação por meio da definição de τ



Resposta ao degrau de amplitude Δx .

Método de identificação com 2 pontos

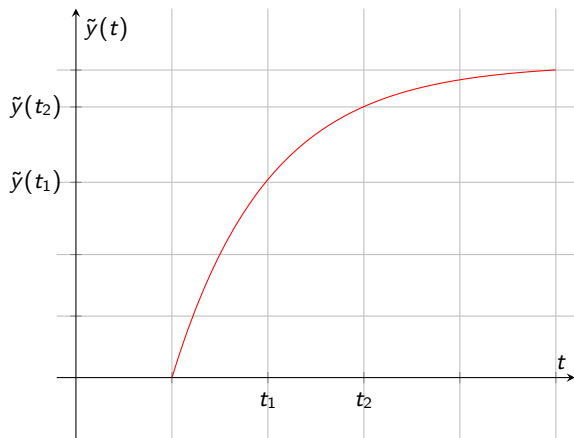
- Escolhe-se

$$\begin{array}{l} t_1 = \theta + \frac{\tau}{3} \\ t_2 = \theta + \tau \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y(t_1) = 0,283\Delta y \\ y(t_2) = 0,632\Delta y \end{array}$$

Logo,

$$\begin{cases} \tau = \frac{3}{2}(t_2 - t_1) \\ \theta = t_2 - \tau \end{cases}$$

Identificação com 2 pontos



Resposta ao degrau.

Identificação da resposta ao degrau por múltiplos pontos

- Seja a resposta ao degrau de amplitude Δu (considere que o atraso θ é conhecido e desconsiderado pela translação no tempo da resposta)

$$\tilde{y}(t) = \underbrace{K\Delta u}_{\tilde{y}(\infty)} \tilde{u}(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

- Manipulando-se

$$\underbrace{\ln\left(\frac{\tilde{y}(\infty) - \tilde{y}(t)}{\tilde{y}(\infty)}\right)}_{\Phi(t)} = -\frac{1}{\tau}t$$

Para vários valores de $(t, \tilde{y}(t))$ pode-se plotar um reta com inclinação $m = -1/\tau$. Aplicando-se a pseudo-inversa,

$$m = (T' T)^{-1} T' \Phi$$

em que T é o vetor com os instantes t_i e Φ o vetor com os valores $\Phi(t_i)$.

- Para o caso geral $\tilde{y}(t) = \tilde{y}(\infty)(1 - Ae^{-t/\tau_1} - Be^{-t/\tau_2} + \dots)$, usar o mesmo procedimento com $m = [m_1 \ m_2]'$, $T = [\ln(A)t_i \ \ln(B)t_i]$, $m_j = -1/\tau_j$, $j = 1, 2$.

Considerações sobre obtenção da resposta ao degrau

Orientações:

- Controlador deve estar em manual (malha aberta)
- degrau deve ser grande o suficiente para ser mensurável mas não ao ponto da resposta ser distorcida por não-linearidades
- certifique-se de que não há distúrbios no processo
- repetir o teste várias vezes (subida e descida)

Limitações:

- maioria dos processos são não-lineares e de alta ordem
- a saída é geralmente contaminada por ruído
- distúrbios podem ocorrer durante o teste
- o degrau não é perfeito (constante de tempo de válvulas, rampa na aceleração de motores etc), mas são boas aproximações em comparação à constante de tempo do processo