107484 – Controle de Processos

Aula: Sistemas de 1ª e 2ª ordem

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB

1º Semestre 2020

Sumário

1. Sistemas de 1ª ordem
2. Sistemas de 2ª ordem
3. Características da resposta subamortecida
4. Efeito da adição de um zero e ganho negativo

Sistemas de 1ª ordem

- Considere o sistema linear

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bf(t)$$

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{b}{a_0} f(t)$$

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kf(t)$$

τ: constante de tempo [seg]

K: ganho estático (estado estacionário)

Se $y(0) = 0$ e $f(0) = 0$,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \qquad \text{(atraso de 1ª ordem)}$$

Para $a_0 = 0$,

$$G(s) = \frac{K}{s} \qquad \text{(integrador puro ou puramente capacitivo)}$$

Sistemas de 1ª ordem

- Considere o sistema linear

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bf(t)$$

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{b}{a_0} f(t)$$

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kf(t)$$

τ: constante de tempo [seg]

K: ganho estático (estado estacionário)

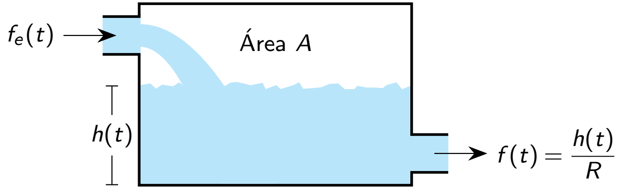
Se $y(0) = 0$ e $f(0) = 0$,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \qquad \text{(atraso de 1ª ordem)}$$

Para $a_0 = 0$,

$$G(s) = \frac{K}{s} \qquad \text{(integrador puro ou puramente capacitivo)}$$

Exemplo: tanque



$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - \frac{h(t)}{R}, \qquad (R: \text{ resist. ao fluxo})$$

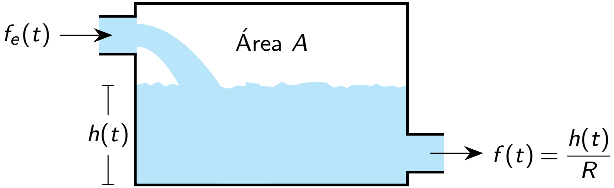
⇝ No regime permanente: $\bar{h} = R\bar{f}_e$

⇝ Var. de desvio: $\tilde{h}(t) \triangleq h(t) - \bar{h}$, $\tilde{f}_e(t) \triangleq f_e(t) - \bar{f}_e$

⇝ Definindo $\tau = AR$ (cte. tempo = capac. armazen. × resist. fluxo); $K = R$ (ganho), tem-se

$$G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Exemplo: tanque



$$A \frac{d}{dt} h(t) = f_e(t) - \frac{h(t)}{R}, \qquad (R: \text{ resist. ao fluxo})$$

⇝ No regime permanente: $\bar{h} = R\bar{f}_e$

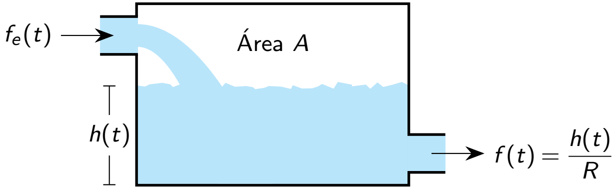
⇝ Var. de desvio: $\tilde{h}(t) \triangleq h(t) - \bar{h}$, $\tilde{f}_e(t) \triangleq f_e(t) - \bar{f}_e$

⇝ Definindo $\tau = AR$ (cte. tempo = capac. armazen. × resist. fluxo); $K = R$ (ganho), tem-se

$$G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Sistemas de 1ª ordem

Exemplo: tanque



$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - \frac{h(t)}{R}, \qquad (R: \text{ resist. ao fluxo})$$

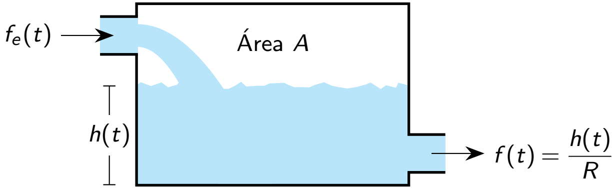
⇝ No regime permanente: $\bar{h} = R\bar{f}_e$

⇝ Var. de desvio: $\tilde{h}(t) \triangleq h(t) - \bar{h}$, $\tilde{f}_e(t) \triangleq f_e(t) - \bar{f}_e$

⇝ Definindo $\tau = AR$ (cte. tempo = capac. armazen. $\times$ resist. fluxo); $K = R$ (ganho), tem-se

$$G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Exemplo: tanque



$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - \frac{h(t)}{R}, \qquad (R: \text{ resist. ao fluxo})$$

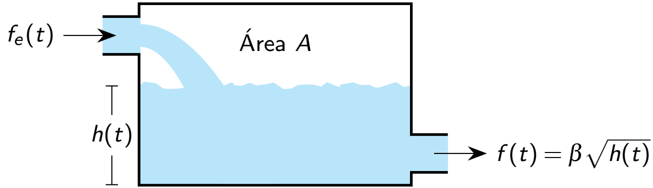
⇝ No regime permanente: $\bar{h} = R\bar{f}_e$

⇝ Var. de desvio: $\tilde{h}(t) \triangleq h(t) - \bar{h}$, $\tilde{f}_e(t) \triangleq f_e(t) - \bar{f}_e$

⇝ Definindo $\tau = AR$ (cte. tempo = capac. armazen. $\times$ resist. fluxo); $K = R$ (ganho), tem-se

$$G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Exemplo: tanque



$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - \beta\sqrt{h(t)}$$

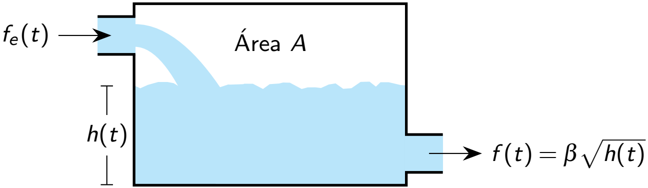
⇝ No regime permanente: $\bar{h} = \left(\frac{\bar{f}_e}{\beta}\right)^2$. Definindo $\tau = \frac{2A}{\beta}\sqrt{\bar{h}}$ e $K = \frac{2}{\beta}\sqrt{\bar{h}}$

$$G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

⇝ Valores da constante de tempo e ganho dependem do ponto de operação (linearização) $\bar{h}$

Sistemas de 1ª ordem

Exemplo: tanque



$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - \beta\sqrt{h(t)}$$

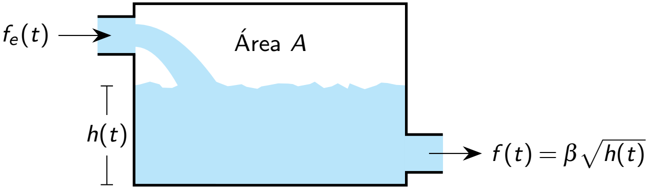
⇝ No regime permanente: $\bar{h} = \left(\frac{\bar{f}_e}{\beta}\right)^2$. Definindo $\tau = \frac{2A}{\beta}\sqrt{\bar{h}}$ e $K = \frac{2}{\beta}\sqrt{\bar{h}}$

$$G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

⇝ Valores da constante de tempo e ganho dependem do ponto de operação (linearização) $\bar{h}$

Sistemas de 1ª ordem

Exemplo: tanque



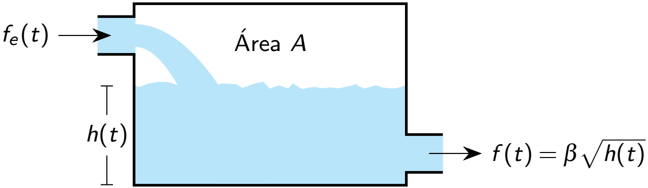
$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - \beta\sqrt{h(t)}$$

⇝ No regime permanente: $\bar{h} = \left(\frac{\bar{f}_e}{\beta}\right)^2$. Definindo $\tau = \frac{2A}{\beta}\sqrt{\bar{h}}$ e $K = \frac{2}{\beta}\sqrt{\bar{h}}$

$$G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

⇝ Valores da constante de tempo e ganho dependem do ponto de operação (linearização) $\bar{h}$

Exemplo: tanque



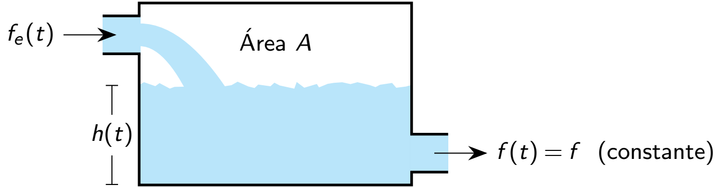
$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - \beta\sqrt{h(t)}$$

⇝ No regime permanente: $\bar{h} = \left(\frac{\bar{f}_e}{\beta}\right)^2$. Definindo $\tau = \frac{2A}{\beta}\sqrt{\bar{h}}$ e $K = \frac{2}{\beta}\sqrt{\bar{h}}$

$$G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

⇝ Valores da constante de tempo e ganho dependem do ponto de operação (linearização) $\bar{h}$

Exemplo: tanque (processo integrador)



⇝ Fluxo de saída contante $f(t) = f$ (uso de bomba com rotação fixa)

$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - f$$

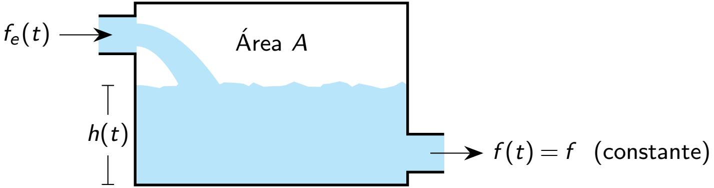
⇝ No regime permanente: $\bar{f}_e = f$

⇝ Var. de desvio: $\tilde{h}(t) \triangleq h(t)$, $\tilde{f}_e(t) \triangleq f_e(t) - \bar{f}_e$

$$A\frac{d}{dt}\tilde{h}(t) = \tilde{f}_e(t) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{1/A}{s}$$

Sistemas de $1^{\underline{a}}$ ordem

Exemplo: tanque (processo integrador)



⇝ Fluxo de saída contante $f(t) = f$ (uso de bomba com rotação fixa)

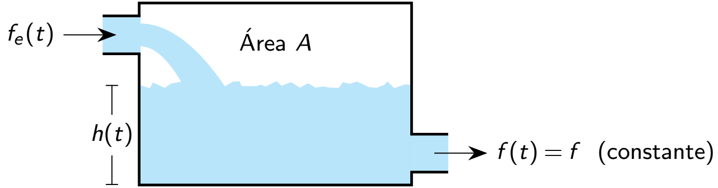
$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - f$$

⇝ No regime permanente: $\bar{f}_e = f$

⇝ Var. de desvio: $\tilde{h}(t) \triangleq h(t)$, $\tilde{f}_e(t) \triangleq f_e(t) - \bar{f}_e$

$$A\frac{d}{dt}\tilde{h}(t) = \tilde{f}_e(t) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{1/A}{s}$$

Exemplo: tanque (processo integrador)



⇝ Fluxo de saída contante $f(t) = f$ (uso de bomba com rotação fixa)

$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - f$$

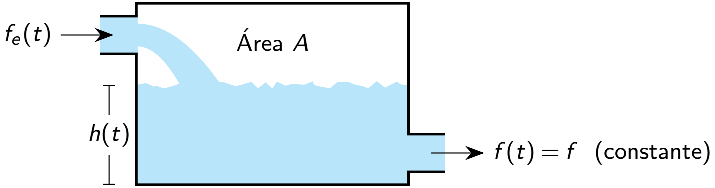
⇝ No regime permanente: $\bar{f}_e = f$

⇝ Var. de desvio: $\tilde{h}(t) \triangleq h(t)$, $\tilde{f}_e(t) \triangleq f_e(t) - \bar{f}_e$

$$A\frac{d}{dt}\tilde{h}(t) = \tilde{f}_e(t) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{1/A}{s}$$

Sistemas de 1ª ordem

Exemplo: tanque (processo integrador)



- Fluxo de saída contante $f(t) = f$ (uso de bomba com rotação fixa)

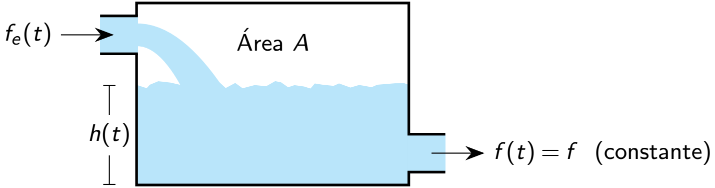
$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - f$$

- No regime permanente: $\bar{f}_e = f$

- Var. de desvio: $\tilde{h}(t) \triangleq h(t)$, $\tilde{f}_e(t) \triangleq f_e(t) - \bar{f}_e$

$$A\frac{d}{dt}\tilde{h}(t) = \tilde{f}_e(t) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{1/A}{s}$$

Exemplo: tanque (processo integrador)



⇝ Fluxo de saída contante $f(t) = f$ (uso de bomba com rotação fixa)

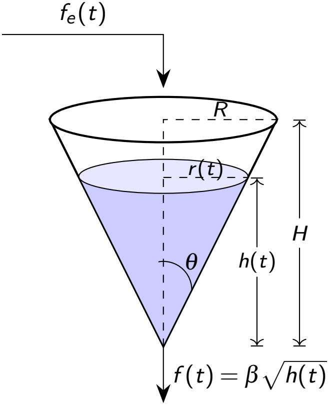
$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - f$$

⇝ No regime permanente: $\bar{f}_e = f$

⇝ Var. de desvio: $\tilde{h}(t) \triangleq h(t)$, $\tilde{f}_e(t) \triangleq f_e(t) - \bar{f}_e$

$$A\frac{d}{dt}\tilde{h}(t) = \tilde{f}_e(t) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{F}_e(s)} = \frac{1/A}{s}$$

Exercício: tanque cônico



⇝ Qual a função de transferência entre $F(s)$ e $H(s)$ no ponto de operação $\bar{h}$?

Resposta ao degrau de um sistema de $1^{\underline{a}}$ ordem

- Seja a entrada degrau $u(t)$ de amplitude A

$$U(s) = \frac{A}{s}$$

Logo,

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s} = \frac{AK}{s} - \frac{AK}{s + 1/\tau}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$y(t) = AK\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\tau) = 0,632 \cdot AK \\ y(t > 4\tau) \approx AK \end{cases}$$

$$y(\tau) = 63,2\% \; y(\infty)$$

Observe que $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = K$

Resposta ao degrau de um sistema de 1ª ordem

- Seja a entrada degrau $u(t)$ de amplitude A

$$U(s) = \frac{A}{s}$$

Logo,

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s} = \frac{AK}{s} - \frac{AK}{s + 1/\tau}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa:

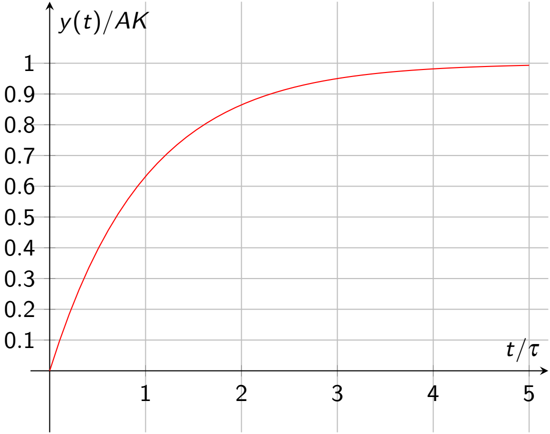
$$y(t) = AK\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\tau) = 0,632 \cdot AK \\ y(t > 4\tau) \approx AK \end{cases}$$

$$y(\tau) = 63,2\% \; y(\infty)$$

Observe que $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = K$

Resposta ao degrau de um sistema de 1ª ordem



Resposta ao degrau de amplitude A.

Resposta ao degrau de um sistema de $1^{\underline{a}}$ ordem

- Para um processo puramente capacitivo,

$$Y(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{s^2}$$

$$y(t) = Kt$$

  - Comportamento de um integrador puro
  - Processo não auto-regulado

Resposta ao impulso de um sistema de $1^{\underline{a}}$ ordem

- Seja a entrada impulso unitário $f(t) = \delta(t)$

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$$

Logo,

$$Y(s) = G(s)F(s) = G(s) = \frac{K/\tau}{s + 1/\tau}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{K}{\tau}e^{-t/\tau}$$

- Observe que, para um sistema linear invariante no tempo,

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t) \quad \Longrightarrow \quad y_\delta(t) = \frac{d}{dt}y_u(t)$$

Resposta ao impulso de um sistema de 1ª ordem

- Seja a entrada impulso unitário $f(t) = \delta(t)$

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$$

Logo,

$$Y(s) = G(s)F(s) = G(s) = \frac{K/\tau}{s+1/\tau}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{K}{\tau}e^{-t/\tau}$$

- Observe que, para um sistema linear invariante no tempo,

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t) \quad \Longrightarrow \quad y_\delta(t) = \frac{d}{dt}y_u(t)$$

Sumário

1. Sistemas de 1ª ordem
2. Sistemas de 2ª ordem
3. Características da resposta subamortecida
4. Efeito da adição de um zero e ganho negativo

Sistemas de 2^{a} ordem

- Seja a equação diferencial de segunda ordem:

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=bf(t)$$

Se $a_0 \neq 0$

$$\tau^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta\tau\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Kf(t)$$

τ: período natural de oscilação do sistema

ζ: fator de amortecimento

K: ganho estático

Para condições iniciais nulas (variáveis de desvio):

$$G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{K}{\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1}$$

Sistemas de 2ª ordem

- Seja a equação diferencial de segunda ordem:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bf(t)$$

Se $a_0 \neq 0$

$$\tau^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kf(t)$$

τ: período natural de oscilação do sistema

ζ: fator de amortecimento

K: ganho estático

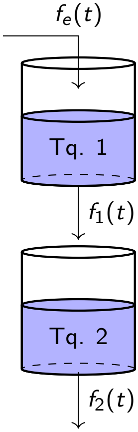
Para condições iniciais nulas (variáveis de desvio):

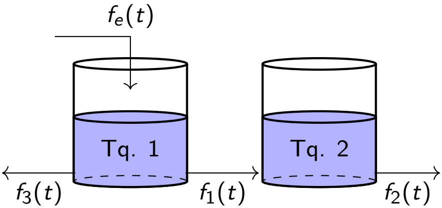
$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

Sistemas de 2ª ordem

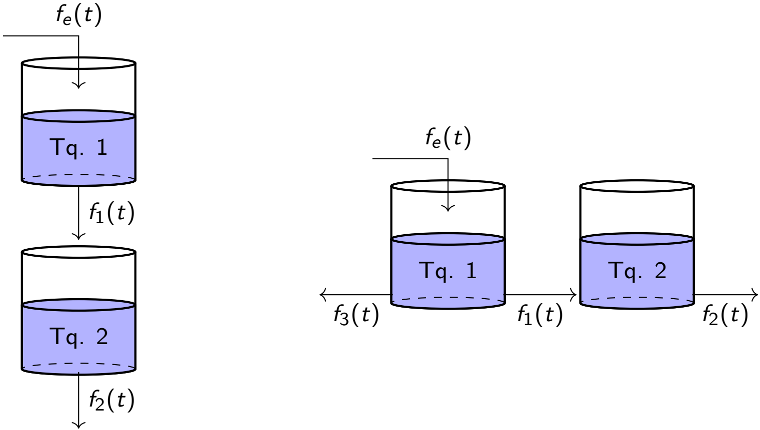
- Exemplos de sistemas de 2ª ordem:

1. $\dfrac{K_1}{\tau_1 s+1}$ em cascata com $\dfrac{K_2}{\tau_2 s+1}$
2. Sistemas inerentes com inércia (raros em sistemas químicos)
3. Processo + controlador



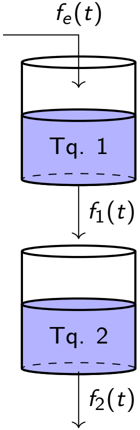


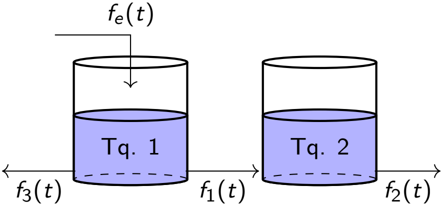
- Exemplos de sistemas de 2ª ordem:
  1. $\dfrac{K_1}{\tau_1 s+1}$ em cascata com $\dfrac{K_2}{\tau_2 s+1}$
  2. Sistemas inerentes com inércia (raros em sistemas químicos)
  3. Processo + controlador



- Exemplos de sistemas de 2ª ordem:

1. $\dfrac{K_1}{\tau_1 s+1}$ em cascata com $\dfrac{K_2}{\tau_2 s+1}$
2. Sistemas inerentes com inércia (raros em sistemas químicos)
3. Processo + controlador





Sistemas de 2ª ordem

- Para uma entrada degrau de amplitude A, tem-se

$$Y(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s}$$

- Raízes da equação característica (polos de $G(s)$):

$$\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = 0$$

$$p_{1,2} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}, \qquad \text{Obs.: } \Re\{p_{1,2}\} < 0$$

Sistemas de 2ª ordem

- Para uma entrada degrau de amplitude A, tem-se

$$Y(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s}$$

- Raízes da equação característica (polos de $G(s)$):

$$\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = 0$$

$$p_{1,2} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}, \qquad \text{Obs.: } \Re\{p_{1,2}\} < 0$$

Resposta ao degrau de sistemas de 2ª ordem

- O sistemas de 2ª ordem também é frequentemente visto na forma

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \qquad \omega_n = \frac{1}{\tau}$$

em que ω_n é a frequência natural não-amortecida

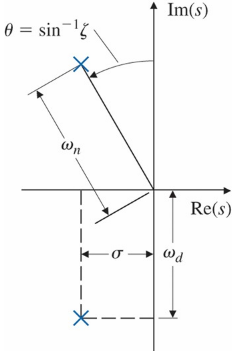
- Raízes da equação característica (polos de $G(s)$):

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

ou

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$$
$$\sigma = \zeta\omega_n$$
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

em que ω_d é a frequência de oscilação amortecida.



Par de pólos complexos no plano-s [Franklin, Powell & Emami-Naeini 2013].

Resposta ao degrau de sistemas de 2ª ordem

- O sistemas de 2ª ordem também é frequentemente visto na forma

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \qquad \omega_n = \frac{1}{\tau}$$

em que ω_n é a frequência natural não-amortecida

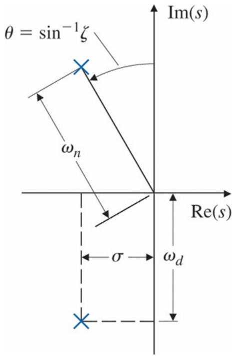
- Raízes da equação característica (polos de $G(s)$):

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

ou

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$$
$$\sigma = \zeta\omega_n$$
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

em que ω_d é a frequência de oscilação amortecida.



Par de pólos complexos no plano-s [Franklin, Powell & Emami-Naeini 2013].

Resposta ao degrau de sistemas de 2ª ordem

- Característica da resposta de sistemas de 2ª ordem

Amortecimento	Classificação	Resposta	Raízes
$\zeta > 1$	superamortecida	estável e monótona	2, reais
$\zeta = 1$	criticamente amortecida	estável e monótona	1, reais (iguais)
$0 < \zeta < 1$	subamortecida	estável e oscilatória	2, par complexo conjugado
$\zeta = 0$	não-amortecida	oscilação sustentável	2, par imaginário puro
$\zeta < 0$	instável	crescente	2, parte real positiva

Respostas associadas a localização dos pólos

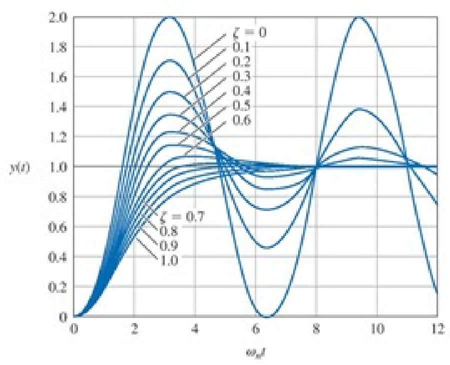


Figura: Respostas ao degrau de sistemas de 2ª ordem [Franklin, Powell & Emami-Naeini 2013].

Resposta ao degrau de sistemas de 2ª ordem

- Caso A – Polos reais distintos: $\zeta > 1$: Resposta superamortecida (sobreamortecida), não-oscilatória
  - Raízes:

$$p_1 = -\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}, \qquad p_2 = -\frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

  - Função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{(\tau_{e_1} s + 1)(\tau_{e_2} s + 1)}, \qquad \tau_{e_1} = -1/p_1, \quad \tau_{e_2} = -1/p_2$$

  - Resposta ao degrau A/s

$$y(t) = KA\left[1 - \frac{1}{\tau_{e_1} - \tau_{e_2}}\left(\tau_{e_1} e^{-t/\tau_{e_1}} - \tau_{e_2} e^{-t/\tau_{e_2}}\right)\right], \qquad t \geq 0$$

Resposta ao degrau de sistemas de 2ª ordem

- Caso A – Polos reais distintos: $\zeta > 1$: Resposta superamortecida (sobreamortecida), não-oscilatória
  - Raízes:

$$p_1 = -\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}, \qquad p_2 = -\frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

  - Função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{(\tau_{e_1} s + 1)(\tau_{e_2} s + 1)}, \qquad \tau_{e_1} = -1/p_1, \quad \tau_{e_2} = -1/p_2$$

  - Resposta ao degrau A/s

$$y(t) = KA\left[1 - \frac{1}{\tau_{e_1} - \tau_{e_2}}\left(\tau_{e_1} e^{-t/\tau_{e_1}} - \tau_{e_2} e^{-t/\tau_{e_2}}\right)\right], \qquad t \geq 0$$

Resposta ao degrau de sistemas de 2ª ordem

- Caso A – Polos reais distintos: $\zeta > 1$: Resposta superamortecida (sobreamortecida), não-oscilatória

  - Raízes:

$$p_1 = -\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}, \qquad p_2 = -\frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

  - Função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{(\tau_{e_1} s + 1)(\tau_{e_2} s + 1)}, \qquad \tau_{e_1} = -1/p_1, \quad \tau_{e_2} = -1/p_2$$

  - Resposta ao degrau A/s

$$y(t) = KA\left[1 - \frac{1}{\tau_{e_1} - \tau_{e_2}}\left(\tau_{e_1} e^{-t/\tau_{e_1}} - \tau_{e_2} e^{-t/\tau_{e_2}}\right)\right], \qquad t \geq 0$$

Resposta ao degrau de sistemas de 2ª ordem

- Caso B – Dois polos reais iguais: $\zeta = 1$: Resposta criticamente amortecida
  - Raízes:

$$p = p_1 = p_2 = -\frac{\zeta}{\tau}$$

  - Função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{(\tau_e s + 1)^2}, \qquad \tau_e = \frac{\tau}{\zeta}$$

  - Resposta ao degrau A/s

$$y(t) = KA\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau_e}\right], \qquad t \geq 0$$

Resposta ao degrau de sistemas de 2ª ordem

- Caso B – Dois polos reais iguais: $\zeta = 1$: Resposta criticamente amortecida
  - Raízes:

$$p = p_1 = p_2 = -\frac{\zeta}{\tau}$$

  - Função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{(\tau_e s + 1)^2}, \qquad \tau_e = \frac{\tau}{\zeta}$$

  - Resposta ao degrau A/s

$$y(t) = KA\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau_e}\right], \qquad t \geq 0$$

- Caso B – Dois polos reais iguais: $\zeta = 1$: Resposta criticamente amortecida
  - Raízes:

$$p = p_1 = p_2 = -\frac{\zeta}{\tau}$$

  - Função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{(\tau_e s + 1)^2}, \qquad \tau_e = \frac{\tau}{\zeta}$$

  - Resposta ao degrau A/s

$$y(t) = KA\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau_e}\right], \qquad t \geq 0$$

Respostas de 1a ordem e 2a ordem sobreamortecida

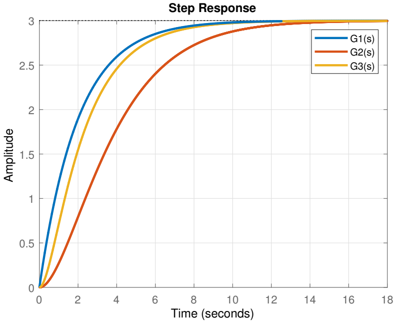
- Seja as funções de transferência

$$G_1(s) = \frac{3}{2s+1} \quad \rightsquigarrow \quad \text{polo:} \; -1/2$$

$$G_2(s) = \frac{3}{(2s+1)(0.5s+1)} \quad \rightsquigarrow \quad \text{polos:} \; -1/2, -2$$

$$G_3(s) = \frac{3}{(2s+1)^2} \quad \rightsquigarrow \quad \text{polos:} \; -1/2, -1/2$$

- Resposta ao degrau unitário:



- Caso C – Par de polos complexos conjugados: $\zeta < 1$: Resposta subamortecida ou oscilatória

  - $0 \leq \zeta < 1 \rightsquigarrow$ pólos são um par de raízes complexas conjugadas

$$p_1 = -\frac{\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}, \qquad p_2 = -\frac{\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$$

  - Resposta ao degrau A/s

$$y(t) = KA\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ e^{-(\zeta/\tau)t} sen(\omega_d t + \phi)\right], \qquad t \geq 0$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}, \qquad \phi = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

- Observação:
  - $\zeta < 0{,}7 \rightarrow$ oscilação em torno de $y(\infty)$
  - Em processos químicos ocorre usualmente devido a presença do controlador

Resposta ao degrau de sistemas de 2ª ordem

- Caso C – Par de polos complexos conjugados: $\zeta < 1$: Resposta subamortecida ou oscilatória

  - $0 \leq \zeta < 1 \rightsquigarrow$ pólos são um par de raízes complexas conjugadas

$$p_1 = -\frac{\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}, \qquad p_2 = -\frac{\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$$

  - Resposta ao degrau A/s

$$y(t) = KA\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\; e^{-(\zeta/\tau)t} sen(\omega_d t + \phi)\right], \qquad t \geq 0$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}, \qquad \phi = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

- Observação:
  - $\zeta < 0{,}7 \rightarrow$ oscilação em torno de $y(\infty)$
  - Em processos químicos ocorre usualmente devido a presença do controlador

Resposta ao degrau de sistemas de 2ª ordem

- Caso C – Par de polos complexos conjugados: $\zeta < 1$: Resposta subamortecida ou oscilatória

  - $0 \leq \zeta < 1 \rightsquigarrow$ pólos são um par de raízes complexas conjugadas

$$p_1 = -\frac{\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}, \qquad p_2 = -\frac{\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$$

  - Resposta ao degrau A/s

$$y(t) = KA\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ e^{-(\zeta/\tau)t} sen(\omega_d t + \phi)\right], \qquad t \geq 0$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}, \qquad \phi = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

- Observação:
  - $\zeta < 0,7 \rightarrow$ oscilação em torno de $y(\infty)$
  - Em processos químicos ocorre usualmente devido a presença do controlador

Resposta subamortecida ao degrau

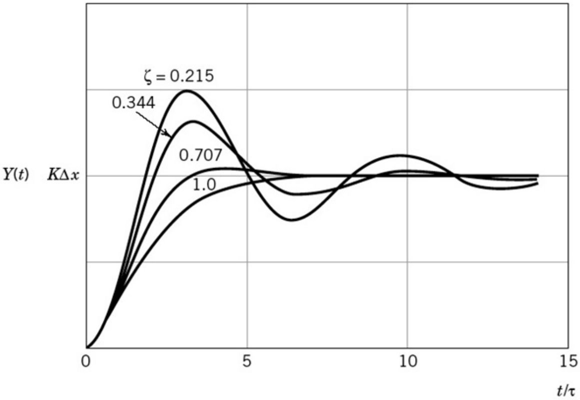


Figura: Efeito do coeficiente de amortecimento na resposta subamortecida ao degrau de amplitude Δx.

Sumário

1. Sistemas de 1ª ordem
2. Sistemas de 2ª ordem
3. Características da resposta subamortecida
4. Efeito da adição de um zero e ganho negativo

Características da resposta subamortecida

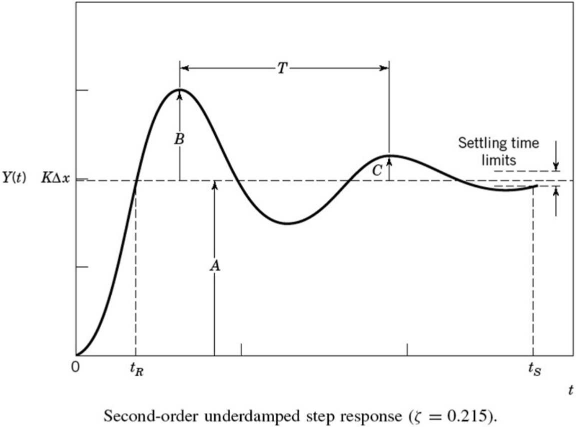


Figura: Característica da resposta subamortecida.

Características da resposta subamortecida

- Sobressinal (sobre-elevação):

$$M = exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \frac{B}{A}$$

$$M(\%) = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

- Tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Razão de declínio:

$$DR = exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \frac{C}{B} = M^2$$

- Sobressinal (sobre-elevação):

$$M = exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \frac{B}{A}$$

$$M(\%) = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

- Tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Razão de declínio:

$$DR = exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \frac{C}{B} = M^2$$

Características da resposta subamortecida

- Sobressinal (sobre-elevação):

$$M = exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \frac{B}{A}$$

$$M(\%) = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

- Tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Razão de declínio:

$$DR = exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \frac{C}{B} = M^2$$

Características da resposta subamortecida

- Tempo de subida:

$$t_R = \frac{\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

Obs.: Um aproximação frequentemente usada em projeto para o tempo de subida para $\zeta = 0.5$ (tempo de 10% a 90% de $y(t)$)

$$t_R \approx 1.8\tau = \frac{1.8}{\omega_n}$$

- Tempo de acomodação:

$$t_s = \frac{3\tau}{\zeta} = \frac{3}{\sigma} \qquad \text{(critério de 5\%)}$$

$$t_s = \frac{4\tau}{\zeta} = \frac{4}{\sigma} \qquad \text{(critério de 2\%)}$$

em que

$$\sigma = \zeta\omega_n = \frac{\zeta}{\tau}$$

Características da resposta subamortecida

- Tempo de subida:

$$t_R = \frac{\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

Obs.: Um aproximação frequentemente usada em projeto para o tempo de subida para $\zeta = 0.5$ (tempo de 10% a 90% de $y(t)$)

$$t_R \approx 1.8\tau = \frac{1.8}{\omega_n}$$

- Tempo de acomodação:

$$t_s = \frac{3\tau}{\zeta} = \frac{3}{\sigma} \qquad \text{(critério de 5\%)}$$

$$t_s = \frac{4\tau}{\zeta} = \frac{4}{\sigma} \qquad \text{(critério de 2\%)}$$

em que

$$\sigma = \zeta\omega_n = \frac{\zeta}{\tau}$$

- Período de oscilação amortecida:

$$\omega_d = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{[rad/s]}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{[Hz]}, \qquad T = \frac{1}{f} \quad \text{[s]}$$

- Período de oscilação natural (caso não houvesse amortecimento, $\zeta = 0$):

$$\omega_n = \frac{1}{\tau} \qquad \text{[rad/s]}$$

Características da resposta subamortecida

- Período de oscilação amortecida:

$$\omega_d = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad [\text{rad/s}]$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad [\text{Hz}], \qquad T = \frac{1}{f} \quad [\text{s}]$$

- Período de oscilação natural (caso não houvesse amortecimento, $\zeta = 0$):

$$\omega_n = \frac{1}{\tau} \qquad [\text{rad/s}]$$

Especificação resposta transiente subamortecida

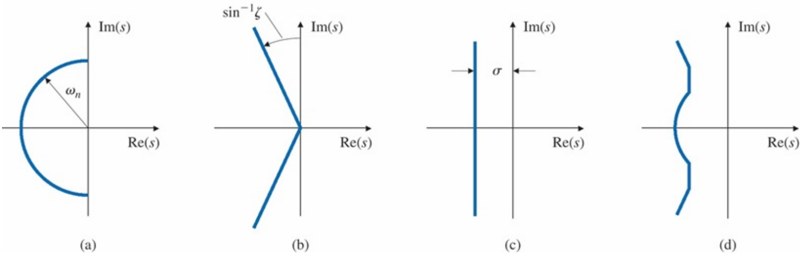


Figura: Lugar geométrico dos pólos no plano-s de acordo com especificação resposta transiente submamortecida (a) tempo de subida; (b) sobresinal; (c) tempo de acomodação; (d) composição das três anteriores (região à esquerda da curva azul) [Franklin, Powell & Emami-Naeini 2013].

Sumário

1. Sistemas de 1ª ordem
2. Sistemas de 2ª ordem
3. Características da resposta subamortecida
4. Efeito da adição de um zero e ganho negativo

- Seja a resposta ao degrau de um sistema de 2ª ordem com zero

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{K(\xi_1 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}\frac{1}{s} \\
&= K\left[\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{\tau_1 s+1} + \frac{A_2}{\tau_2 s+1}\right]
\end{aligned}
$$

em que

$$
A_0 = 1; \quad A_1 = \frac{-\tau_1(\tau_1-\xi_1)}{\tau_1-\tau_2}; \quad A_2 = \frac{-\tau_2(\tau_2-\xi_1)}{\tau_2-\tau_1};
$$

Com a seguinte resposta no tempo

$$
y(t) = K\left[1 - \left(\frac{\tau_1-\xi_1}{\tau_1-\tau_2}\right)e^{-t/\tau_1} - \left(\frac{\tau_2-\xi_1}{\tau_2-\tau_1}\right)e^{-t/\tau_2}\right]
$$

- Cenários ($\tau_1 < \tau_2$):

1. $\xi_1 > \tau_2$
2. $\xi_1 = \tau_2$ ou $\xi_1 = \tau_1$
3. $0 < \xi_1 < \tau_2$
4. $\xi_1 < 0$

Efeito da adição de um zero em um sistema de 2ª ordem

- Seja a resposta ao degrau de um sistema de 2ª ordem com zero

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{K(\xi_1 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}\frac{1}{s} \\
&= K\left[\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{\tau_1 s+1}+\frac{A_2}{\tau_2 s+1}\right]
\end{aligned}
$$

em que

$$
A_0 = 1; \quad A_1 = \frac{-\tau_1(\tau_1-\xi_1)}{\tau_1-\tau_2}; \quad A_2 = \frac{-\tau_2(\tau_2-\xi_1)}{\tau_2-\tau_1};
$$

Com a seguinte resposta no tempo

$$
y(t) = K\left[1-\left(\frac{\tau_1-\xi_1}{\tau_1-\tau_2}\right)e^{-t/\tau_1}-\left(\frac{\tau_2-\xi_1}{\tau_2-\tau_1}\right)e^{-t/\tau_2}\right]
$$

- Cenários ($\tau_1 < \tau_2$):

1. $\xi_1 > \tau_2$
2. $\xi_1 = \tau_2$ ou $\xi_1 = \tau_1$
3. $0 < \xi_1 < \tau_2$
4. $\xi_1 < 0$

Efeito da adição de um zero em um sistema de $2^{\underline{a}}$ ordem

- Seja a resposta ao degrau de um sistema de $2^{\underline{a}}$ ordem com zero

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{K(\xi_1 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}\frac{1}{s} \\
&= K\left[\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{\tau_1 s+1}+\frac{A_2}{\tau_2 s+1}\right]
\end{aligned}
$$

em que

$$A_0 = 1; \quad A_1 = \frac{-\tau_1(\tau_1-\xi_1)}{\tau_1-\tau_2}; \quad A_2 = \frac{-\tau_2(\tau_2-\xi_1)}{\tau_2-\tau_1};$$

Com a seguinte resposta no tempo

$$y(t) = K\left[1-\left(\frac{\tau_1-\xi_1}{\tau_1-\tau_2}\right)e^{-t/\tau_1}-\left(\frac{\tau_2-\xi_1}{\tau_2-\tau_1}\right)e^{-t/\tau_2}\right]$$

- Cenários ($\tau_1 < \tau_2$):
  1. $\xi_1 > \tau_2$
  2. $\xi_1 = \tau_2$ ou $\xi_1 = \tau_1$
  3. $0 < \xi_1 < \tau_2$
  4. $\xi_1 < 0$

Efeito da adição de um zero em um sistema de 2ª ordem

- Seja a resposta ao degrau de um sistema de 2ª ordem com zero

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{K(\xi_1 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}\frac{1}{s} \\
&= K\left[\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{\tau_1 s+1}+\frac{A_2}{\tau_2 s+1}\right]
\end{aligned}
$$

em que

$$
A_0 = 1; \quad A_1 = \frac{-\tau_1(\tau_1-\xi_1)}{\tau_1-\tau_2}; \quad A_2 = \frac{-\tau_2(\tau_2-\xi_1)}{\tau_2-\tau_1};
$$

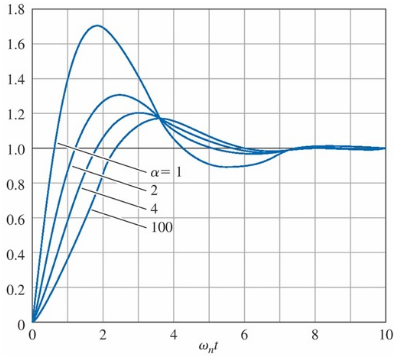
Com a seguinte resposta no tempo

$$
y(t) = K\left[1-\left(\frac{\tau_1-\xi_1}{\tau_1-\tau_2}\right)e^{-t/\tau_1}-\left(\frac{\tau_2-\xi_1}{\tau_2-\tau_1}\right)e^{-t/\tau_2}\right]
$$

- Cenários ($\tau_1 < \tau_2$):
  1. $\xi_1 > \tau_2$
  2. $\xi_1 = \tau_2$ ou $\xi_1 = \tau_1$
  3. $0 < \xi_1 < \tau_2$
  4. $\xi_1 < 0$

Efeito da adição de um zero em um sistema de 2ª ordem

- Para um sistema de 2ª ordem padrão, considere a presença de um zero em $s = -\alpha\zeta/\tau = -\alpha\sigma$ em que α é um parâmetro que determina o quão próximo o zero está da parte real dos pólos $(-\sigma)$



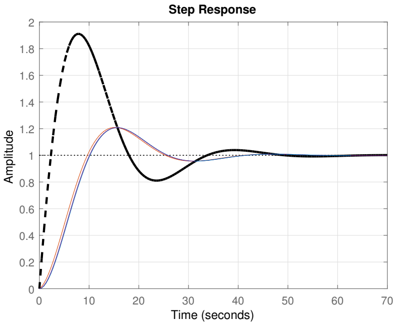
Resposta ao degrau de um sistema de 2ª ordem ($\zeta = 0,5$) com um zero para diferentes valores de α. [Franklin, Powell & Emami-Naeini 2013].

Efeito da adição de um zero em um sistema de $2^{\underline{a}}$ ordem

- Seja o sistema de $2^{\underline{a}}$ ordem com o par de polos $2 \pm 4j$

$$G(s) = \frac{1}{20s^2 + 4s + 1}$$

- A resposta ao degrau do sistema de $2^{\underline{a}}$ ordem com diferentes valores de zeros adicionados é dado na figura abaixo. A resposta do sistema sem zeros e com zeros adicionados em $s = -2$ e $s = -10$ é dada pelas linhas contínuas com pouca diferença. A reposta com um zero adicionado em $s = -0.1$ é dada pela linha tracejada preta que aumenta significamente o sobressinal.

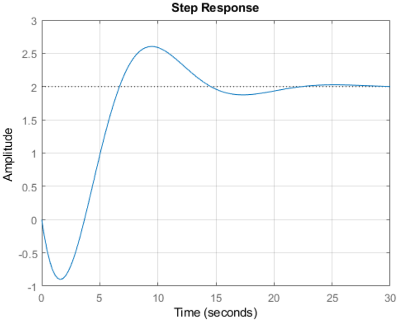


Exemplo I - Zero no semiplano direito (SPD)

- Seja a função de transferência

$$G(s) = \frac{2(-3s+1)}{5s^2+2s+1}$$

- Ganho estático: $G(0) = 2$; Polos: $-0.2 \pm j0.4$; Zero: $+1/3$.
- Resposta ao degrau unitário:



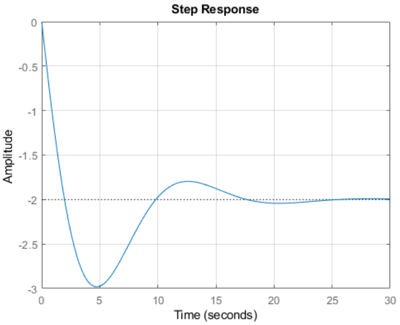
$\rightsquigarrow$ Resposta inversa.

Exemplo II - Ganho estático do sistema negativo

- Seja a função de transferência

$$G(s) = \frac{-2(3s+1)}{5s^2+2s+1}$$

- Ganho estático: $G(0) = -2$; Polos: $-0.2 \pm j0.4$; Zero: $-1/3$.
- Resposta ao degrau unitário:



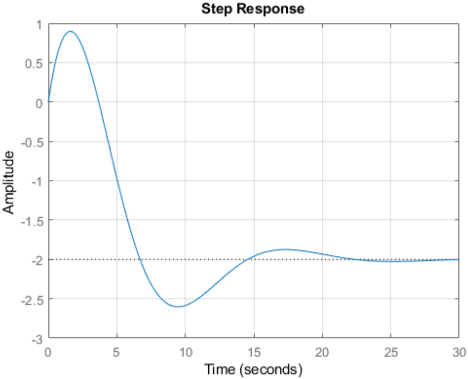
$\rightsquigarrow$ Atuação inversa entre variável manipulada (entrada) e controlada (saída).

Exemplo III - Ganho estático negativo e zero no SPD

- Seja a função de transferência

$$G(s) = \frac{-2(-3s+1)}{5s^2+2s+1}$$

- Ganho estático: $G(0) = -2$; Polos: $-0.2 \pm j0.4$; Zero: $+1/3$.
- Resposta ao degrau unitário:



Exemplo IV - Polo na origem

- Seja a função de transferência

$$G(s) = \frac{5}{s(2s+1)}$$

- Resposta ao degrau unitário:

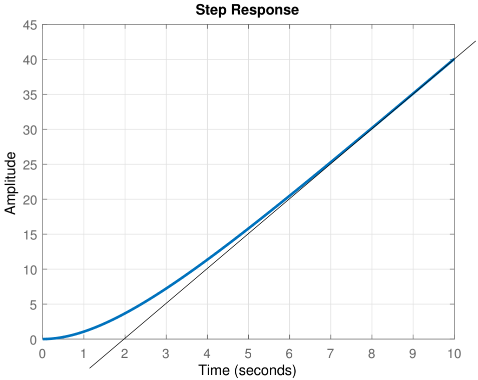


Figura: Reposta ao degrau unitário e assintota.