ENE0004 – Controle de Processos

Aula: graus de liberdade, variáveis de desvio e linearização

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB

1^o Semestre 2020

Sumário

Análise de graus de liberdade

- Os graus de liberdade de um processo são as variáveis independentes que devem ser especificadas para definir o processo completamente (resposta do conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema).

- O controle do processo nos pontos fixos especificados só é obtido se, e somente se, todos os graus de liberdade tiverem sido especificados.

Graus de liberdade

$$\boxed{\text{no. graus de liberdade}} = \boxed{\text{no. vars. independentes}} \text{ - } \boxed{\text{no. eqs. independentes}}$$

$$N_f = N_V - N_E$$

Casos

1. $N_f = 0$: processo exatamente especificado
2. $N_f > 0$: processo sub-especificado (infinitas soluções)
3. $N_f < 0$: processo super-especificado (sem solução)

Análise de graus de liberdade

Observações:

- Determinação incorreta se informações relevantes forem desprezadas ou equações redundantes incluída.
- Lei de controle introduz equação adicional entre as variáveis medidas e manipuladas e reduz por 1 os graus de liberdade do processo.

Manipulação dos graus de liberdade

Em geral $N_f > 0$. Há duas formas de se diminuir N_f (aumentar N_E):

1. Ambiente externo (variáveis de distúrbio): $d(t) = g(t)$

$$N_f = N_{f_0} - N_d, \qquad N_d : \text{ no. vars. distúrbio}$$

2. Objetivos (leis) de controle (variáveis manipuladas): $mv(t) = g(y_i)$

$$N_f = N_{f_0} - N_{mv}, \qquad N_{mv} : \text{ no. vars. manipuladas}$$

- Graus de liberdade de controle (N_{f_c}): variáveis que podem ser controladas de forma independente $\rightsquigarrow N_{f_c} = N_f - N_d$.
- Usualmente, mas não sempre, $N_{f_c} = N_{mv}$

Balanço de energia em sistemas abertos

Exemplo: Tanque com aquecimento

- Equações diferenciais que descrevem o processo:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}h(t) &= \dfrac{1}{A}(f_e(t) - f(t)) \\ \dfrac{d}{dt}T(t) &= \dfrac{f_e(t)}{Ah(t)}(T_e(t) - T(t)) + \dfrac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p A h(t)} \end{cases}$$

- Análise dos graus de liberdade
  - Número de equações: $N_E = 2$
  - Número de variáveis: $N_V = 6 \rightsquigarrow h(t), T(t)$ (vars. de estado/ saídas) $f_e(t)$, $f(t)$, $T_e(t)$, $\dot{Q}(t)$ (entradas)
  - Graus de liberdade: $N_f = 4$
- Para determinar precisamente $h(t)$ e $T(t) \Rightarrow N_f = 0$
  - Atribuindo como distúrbio: $f_e(t)$, $T_e(t)$ (espec. pela unidade precedente)
  - Atribuindo como variável manipulada: $f(t)$, $\dot{Q}(t)$ (leis de controle)

$\rightsquigarrow$ Por exemplo, $f(t)$ poderia ser utilizado para controlar $h(t)$ e $\dot{Q}(t)$ para controlar $T(t)$.

Sumário

Sistema linear

Um sistema é dito linear se satisfaz as propriedades:

1. Aditividade:
$$L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2]$$
2. Homogeneidade:
$$L[ku] = kL[u]$$

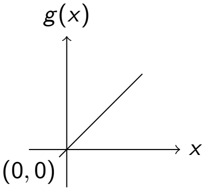
$L[\cdot]$: operador matemático que representa o sistema
u: entrada
k: escalar

Princípio da superposição

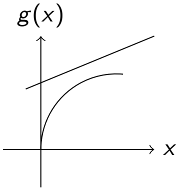
$$L[k_1 u_1 + k_2 u_2] = k_1 L[u_1] + k_2 L[u_2]$$

- Um sistema que não verifique qualquer uma destas propriedades é dito não-linear

Sistema linear



Curva linear



Curva não-linear

- Funções lineares:

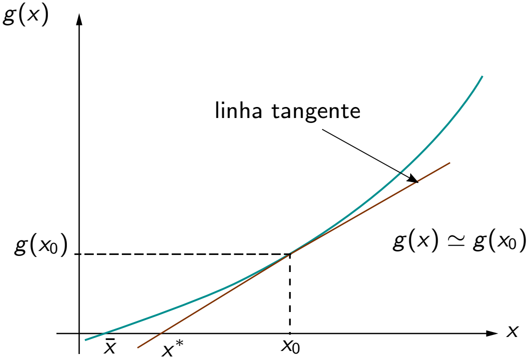
$$g(x) = ax$$
$$g(x,u) = ax + bu$$

- Funções não-lineares:

$$g(x) = ax + b \qquad \text{(função afim)}$$
$$g(x) = \frac{1}{x} + ax$$
$$g(x) = ax^2$$
$$g(x,u) = xu + u$$

Linearização de sistemas com uma variável

- Linearização de $g(x)$ no ponto x_0:



$$g(x) \simeq g(x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_0} (x - x_0)$$

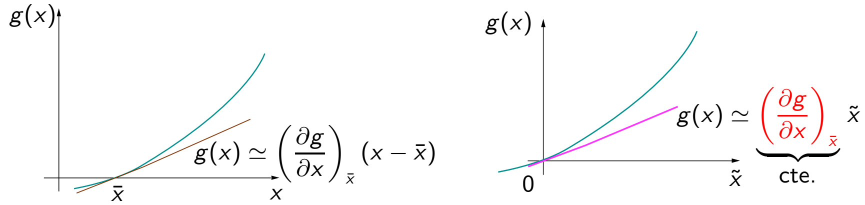
x_0	: ponto de linearização
$\bar{x}$	: ponto em que $g(\bar{x}) = 0$ (pto. eq.)
x^*	: cruzamento da reta tang. c/ $g(x) = 0$

$\rightsquigarrow$ Problema: $x^* \neq 0$ (função afim)

$\rightsquigarrow$ Necessário deslocar reta tangente para a origem $\rightsquigarrow$ mudança de variável $\tilde{x} \triangleq x - x^*$

Linearização de sistemas com uma variável

⇝ Em sistemas dinâmicos usualmente deseja-se linearizar a dinâmica em torno do ponto de equilíbrio, ou seja, um ponto $\bar{x}$ tal que $g(\bar{x}) = 0$ ($\frac{d}{dt}x(t) = g(x) = 0$)



⇝ O ponto de equilíbrio é o ponto em que o sistema pode operar em regime permanente (ponto de operação)

⇝ Nesse caso: $x_0 = \bar{x} = x^*$

⇝ Necessário ainda mudança de variável $\tilde{x} \triangleq x - \bar{x}$ para deslocar reta tangente para a origem

Linearização de sistemas com uma variável

- Seja o processo

$$\frac{dx}{dt} = g(x)$$

- **Ponto de linearização**: x_0

- Expansão da função não-linear $g(x)$ em série de Taylor em torno de x_0:

$$g(x) = g(x_0) + \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \left(\frac{d^2 g}{dx^2}\right)_{x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + \left(\frac{d^n g}{\partial x^n}\right)_{x_0} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

- Negligenciando termos de ordem maior ou igual a dois

$$g(x) \simeq g(x_0) + \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) = \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x_0} x + (\text{termos constantes})$$

⇝ A equação ainda não é linear devido a presença de termos constantes.

⇝ A aproximação é exata somente no ponto de linearização (x_0).

Sumário

Variáveis de desvio

- Seja o valor em regime permanente $\bar{x}$ que pode ser determinado por

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(\bar{x}) = 0 \tag{1}$$

- Considere $\bar{x}$ o ponto de linearização do sistema $\dot{x} = g(x)$, ou seja, $x_0 = \bar{x}$.

- Então, em $\bar{x}$ tem-se

$$\frac{dx}{dt} = g(\bar{x}) + \left(\frac{dg}{dx}\right)_{\bar{x}} (x - \bar{x}) \tag{2}$$

- Considere a definição da variável de desvio abaixo.

Variável de desvio

$$\tilde{x} \triangleq x - \bar{x}$$

- A variável de desvio descreve a magnitude do deslocamento do sistema do ponto de operação desejado.

Variáveis de desvio

- Observe que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-\bar{x})}{dt} = \frac{d\tilde{x}}{dt}, \qquad \text{pois} \qquad \frac{d\bar{x}}{dt} = 0$$

- Da definição da variável de desvio e $g(\bar{x}) = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{g(\bar{x})}_{=0} + \left(\frac{dg}{dx}\right)_{\bar{x}} \underbrace{(x-\bar{x})}_{\tilde{x}}$$

tem-se o seguinte sistema linear

$$\boxed{\frac{d\tilde{x}}{dt} = \left(\frac{dg}{dx}\right)_{\bar{x}} \tilde{x}}$$

- Obs.: O mesmo resultado é obtido subtraindo (1) de (2).

Linearização de sistemas com uma variável

Exemplo:

- Seja $\frac{d}{dt}x(t) = g(x)$, $g(x) = x^2 - 9$. Linearização em $x_0 = 2$:

$$g(x) \simeq g(x_0) + \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0) = -5 + 4(x-2) = 4x - 13 \quad \rightsquigarrow \text{Não é linear!} \quad (3)$$

- Achando o ponto de equilíbrio $\bar{x} \in \{x : \; g(x) = 0\}$:

$$\frac{d}{dt}x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(\bar{x}) = \bar{x}^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 3$$

- Linearização em $x_0 = \bar{x} = 3$:

$$g(x) \simeq g(x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_0}(x - x_0) = 0 + 6(x - 3) = 6x - 18 \quad \rightsquigarrow \text{Não é linear!} \quad (4)$$

- Definindo a variável de desvio $\tilde{x} \triangleq x - 3$, tem-se $g(x) \simeq 6\tilde{x}$. Observe que

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \frac{d}{dt}(x(t) - 3) = \frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}3 = \frac{d}{dt}x(t) = g(x)$$

$$\boxed{\therefore \quad \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = 6\tilde{x} \qquad \rightsquigarrow \text{Eq. diferencial linear!}}$$

Exemplo:

⇝ Observe que ambas as equações (3) e (4), ou seja,

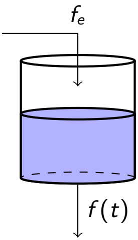
$$g(x) \simeq 4x - 13, \qquad x \;\text{ em torno de }\; x_0 = 2$$

e

$$g(x) \simeq 6x - 18, \qquad x \;\text{ em torno de }\; x_0 = \bar{x} = 3$$

podem ser transformadas de afim para linear introduzindo variáveis de desvio. Contudo, em sistemas dinâmicos faz mais sentido obter o comportamento linear no ponto de operação em regime permanente, ou seja, no ponto de equilíbrio ($\dot{x} = 0$).

Exemplo: dinâmica do nível de um tanque



- Assuma f_e constante

$$A\frac{dh(t)}{dt} = f_e - f(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{dh(t)}{dt} = \frac{f_e}{A} - \frac{f(t)}{A}$$

- Se $f(t) = \alpha h(t)$ (α constante):

$$\frac{dh(t)}{dt} = g(h), \qquad g(h) = \frac{f_e}{A} - \frac{\alpha h(t)}{A} \qquad \text{(sist. afim)}$$

- Se $f(t) = \beta\sqrt{h(t)}$:

$$g(h) = \frac{f_e}{A} - \frac{\beta\sqrt{h(t)}}{A} \qquad \text{(sist. não-linear)}$$

Linearização de sistemas com uma variável

- Expandindo $g(h)$ em série de Taylor em torno de h_0: $g(h) = 1/A(f_e - \beta\sqrt{h(t)})$:

$$g(h) \approx g(h_0) + \frac{dg(h)}{dh}(h(t) - h_0)$$
$$g(h) \approx \left(\frac{f_e}{A} - \frac{\beta\sqrt{h_0}}{A}\right) - \frac{\beta}{2A\sqrt{h_0}}(h(t) - h_0)$$

$\rightsquigarrow$ Logo, o sistema resultante é afim devido a presença de termos constantes

$$\frac{dh(t)}{dt} = \underbrace{\frac{f_e}{A} - \frac{\beta\sqrt{h_0}}{A}}_{\text{termo constante}} - \frac{\beta}{2A\sqrt{h_0}}\left(h(t) - \underbrace{h_0}_{\text{termo constante}}\right)$$

Linearização de sistemas com uma variável

- Observe que o resultado seria o mesmo expandindo-se apenas o termo não linear $\beta\sqrt{h(t)}$ em torno de h_0

$$\beta\sqrt{h(t)} = \beta\sqrt{h_0} + \left(\frac{d(\beta\sqrt{h(t)})}{dh}\right)_{h(t)=h_0} (h(t) - h_0) + \cdots$$

$$\beta\sqrt{h(t)} \approx \beta\sqrt{h_0} + \frac{\beta}{2\sqrt{h_0}}(h(t) - h_0)$$

- e substituindo no sistema não-linear

$$A\frac{dh(t)}{dt} = f_e - \left(\beta\sqrt{h_0} + \frac{\beta}{2\sqrt{h_0}}h(t) - \frac{\beta}{2\sqrt{h_0}}h_0\right)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \underbrace{\left(\frac{f_e}{A} - \frac{\beta\sqrt{h_0}}{A} + \frac{\beta}{2A\sqrt{h_0}}h_0\right)}_{\text{termo constante}} - \frac{\beta}{2A\sqrt{h_0}}h(t)$$

Variáveis de desvio

- Considere agora a linearização em torno do ponto de operação em regime permanente $\bar{h}$ determinado por

$$g(\bar{h}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_e - \beta\sqrt{\bar{h}} = 0 \tag{5}$$

- Definindo a variável de desvio $\tilde{h}(t) = h(t) - \bar{h}$, tem-se

$$\frac{d\tilde{h}(t)}{dt} = \underbrace{g(\bar{h})}_{=0} + \frac{dg(\bar{h})}{dh}(h(t) - \bar{h}) = \frac{dg(\bar{h})}{dh}\tilde{h}(t) = -\frac{\beta}{2A\sqrt{\bar{h}}}\,\tilde{h}(t) \tag{6}$$

- Portanto o sistema linear é dado por

$$\boxed{\frac{d\tilde{h}(t)}{dt} = -\frac{\beta}{2A\sqrt{\bar{h}}}\,\tilde{h}(t)}$$

Linearização de sistemas com uma variável

Resumo: Caso monovariável

- Sistema não-linear: $$\frac{dx}{dt} = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
- Ponto de operação em regime permanente: $\bar{x} \quad \rightsquigarrow \quad g(\bar{x}) = 0$
- Ponto de linearização: x_0
- Expansão truncada em Taylor em torno de x_0:

$$\frac{dx}{dt} = g(x_0) + \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x_0} \underbrace{(x - x_0)}_{\tilde{x}}$$

- Se $x_0 = \bar{x} \quad \Rightarrow \quad g(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \left(\dfrac{dg}{dx}\right)_{x_0} \tilde{x}$

Sumário

Linearização de processos multivariáveis

Caso multivariável

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Exemplo: $x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = g_1(x_1, x_2) \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = g_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Linearização de processos multivariáveis

- Linearizando em torno de $x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2) = {} & g_1(x_{10}, x_{20}) + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)_{x_0} (x_1 - x_{10}) \\
& + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)_{x_0} (x_2 - x_{20}) + \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2}\right)_{x_0} \frac{(x_1 - x_{10})^2}{2!} \\
& + \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2}\right)_{x_0} \frac{(x_2 - x_{20})^2}{2!} + \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1, \partial x_2}\right)_{x_0} (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) + \cdots
\end{aligned}
$$

Idem para $g_2(x_1, x_2)$.

- Seja o sistema em estado estacionário (regime permanente)

$$
\begin{cases}
g_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \\
g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0
\end{cases}
$$

Linearização de processos multivariáveis

Considerando o ponto de linearização como sendo o ponto de operação $\bar{x}$, ou seja,

$$x_{10} = \bar{x}_1 \qquad \text{e} \qquad x_{20} = \bar{x}_2$$

e definindo $\tilde{x}_1 = x_1 - \bar{x}_1$ e $\tilde{x}_2 = x_2 - \bar{x}_2$, tem-se o sistema linear

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}_1}{dt} = \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)_{\bar{x}} \tilde{x}_1 + \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)_{\bar{x}} \tilde{x}_2 \\[2ex] \dfrac{d\tilde{x}_2}{dt} = \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)_{\bar{x}} \tilde{x}_1 + \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)_{\bar{x}} \tilde{x}_2 \end{cases}$$

ou na forma matricial

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = {\color{red}A}\tilde{x}, \qquad A = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)_{\bar{x}} & \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)_{\bar{x}} \\ \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)_{\bar{x}} & \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)_{\bar{x}} \end{bmatrix}}_{\text{matriz Jacobiana}}, \qquad \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo: dinâmica de nível de um tanque com fluxo de entrada variável

Seja $f_e(t)$ variável,

$$\frac{dh(t)}{dt} = g(h, f_e), \qquad g(h, f_e) = 1/A(f_e(t) - \beta\sqrt{h(t)}) \tag{7}$$

Em regime permanente
$$g(\bar{h}, \bar{f}_e) = \bar{f}_e - \beta\sqrt{\bar{h}} = 0 \tag{8}$$

Sistema linearizado, em que $\tilde{h}(t) = h(t) - \bar{h}$ e $\tilde{f}_e(t) = f_e(t) - \bar{f}_e$

$$\frac{d\ \tilde{h}(t)}{dt} = g(\bar{h}, \bar{f}_e) + \frac{\partial g(h, f_e)}{\partial f_e}(f_e(t) - \bar{f}_e) + \frac{\partial g(h, f_e)}{\partial h}(h(t) - \bar{h}) \tag{9}$$

Como $g(\bar{h}, \bar{f}_e) = 0$, tem-se o sistema linear

$$\boxed{\frac{d\tilde{h}(t)}{dt} = \frac{1}{A}\tilde{f}_e(t) - \frac{\beta}{2A\sqrt{\bar{h}}}\tilde{h}(t) \qquad (10)}$$

Exemplo

- Seja o sistema não-linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = g_1(x_1, x_2, m_1, m_2, d_1) \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = g_2(x_1, x_2, m_1, m_2, d_2) \end{cases}$$

- Assumindo que o ponto de linearização $p_0 = (x_{10}, x_{20}, m_{10}, m_{20}, d_{10}, d_{20})$ corresponde ao ponto de estado estacionário $\bar{p} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{d}_1, \bar{d}_2)$ e definindo as variáveis de desvio, tem-se o sistema linearizado

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}_1}{dt} = a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + b_{11}\tilde{m}_1 + b_{12}\tilde{m}_2 + e_1\tilde{d}_1 \\ \\ \dfrac{d\tilde{x}_2}{dt} = a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + b_{21}\tilde{m}_1 + b_{22}\tilde{m}_2 + e_2\tilde{d}_2 \end{cases}$$

em que $a_{ij} = \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{\bar{p}}$, $b_{ij} = \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial m_j}\right)_{\bar{p}}$, $e_i = \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial d_i}\right)_{\bar{p}}$

Sumário

Representação em espaço de estados

- Para o exemplo anterior considere ainda que as variáveis medidas são representadas por y, as manipuladas por m e os distúrbios por d e os estados por x,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = g_1(x_1, x_2, m_1, m_2, d_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = g_2(x_1, x_2, m_1, m_2, d_2) \end{cases} \qquad y = s(x_1, x_2, m_1, m_2, d_2)$$

- Sistema linearizado na representação espaço de estados em torno de $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{u}, \bar{w})$ com $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $\bar{u} = (\bar{m}_1, \bar{m}_2)$ e $\bar{w} = (\bar{d}_1, \bar{d}_2)$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d\tilde{x}_1/dt \\ d\tilde{x}_2/dt \end{bmatrix}}_{\dot{\tilde{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{m}_1 \\ \tilde{m}_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{w}}$$

Em que

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} m_1 - \bar{m}_1 \\ m_2 - \bar{m}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} d_1 - \bar{d}_1 \\ d_2 - \bar{d}_2 \end{bmatrix}$$

Representação em espaço de estados

- Em forma compacta

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} + E\tilde{w} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} + D\tilde{u} + F\tilde{w} \end{cases}$$

em que as matrizes jacobianas são dadas por

$$A = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{\bar{p}}, \ B = \left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]_{\bar{p}}, \ E = \left[\frac{\partial g}{\partial w}\right]_{\bar{p}}, \ C = \left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]_{\bar{p}}, \ D = \left[\frac{\partial s}{\partial u}\right]_{\bar{p}}, \ F = \left[\frac{\partial s}{\partial w}\right]_{\bar{p}}$$

- Pode-se também considerar

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \begin{bmatrix} B & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} + \begin{bmatrix} D & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \hat{B}\hat{u} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} + \hat{D}\hat{u} \end{cases}$$

Resposta no espaço de estados

- Seja um sistema linear invariante no tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad x_0 = x(0)$$

- A saída do sistema para uma condição inicial $x(0)$ e uma entrada $u(t)$ é dada por

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- A resposta de um sistema com entrada nula $\dot{x}(t) = Ax(t)$ para uma condição inicial $x(0)$ é dada por

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

- A exponencial de matriz e^{At} tem termos que são combinações lineares de seus autovalores e respectivas derivadas. Se A tem um autovalor λ_1 com índice n_1, então as entradas de e^{At} são combinações lineares de $\{e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}\}$.