107484 – Controle de Processos

Aula: Balanços de massa e de energia

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB

UnB

1^o Semestre 2020

Sumário

Introdução

Princípio de conservação de uma quantidade S

$$\boxed{\frac{\text{acúmulo de } S \text{ no sistema}}{\text{período de tempo}}} = \boxed{\frac{\text{fluxo de } S \text{ para o sistema}}{\text{período de tempo}}} - \boxed{\frac{\text{fluxo de } S \text{ do sistema}}{\text{período de tempo}}} + \boxed{\frac{\text{qtd. gerada de } S \text{ no sistema}}{\text{período de tempo}}} - \boxed{\frac{\text{qtd. consumida de } S \text{ no sistema}}{\text{período de tempo}}}$$

Quantidades fundamentais (S)

1. Massa total
2. Massa de um componente individual
3. Energia total
4. Momento

Variáveis de estados

Menor conjunto de variáveis (propriedades) que caracteriza um sistema num dado instante de tempo. Ex.: concentração, temperatura, pressão, taxa de fluxo etc.

Quanto à dependência ou não das variáveis de processo no tempo

1 Processos em estado estacionário (em regime permanente)

- As principais variáveis de processo não se alteram no tempo (excetuando pequenas flutuações).
- Equações de balanço $\rightsquigarrow$ conjunto de equações algébricas.
- Ex.: aquecimento de água num chuveiro elétrico para uma dada vazão de operação $\rightsquigarrow$ temperaturas de entrada e saída são diferentes mas contantes no tempo.

2 Processos em estado não estacionário (em regime transiente)

- Variáveis de processo variam com o tempo.
- Equações de balanço $\rightsquigarrow$ conjunto de equações diferenciais.
- Ex.: forno de cozinha.

Notação

Notação adotada

- Massa: m (Kg)
- Fluxo de massa: $\dot{m}$ (Kg/s)
- Fluxo volumétrico: f (m3/s)
- Volume: V (m3)
- Peso específico: ρ (Kg/m3)

Os termos abaixo são geralmente especificados para um componente:

- Quantidade de matéria: n (mol)
- Concentração: c (mol/m3)
- Taxa de reação: r (mol/s/m3)
- Termo de geração: R (mol/s ou Kg/s)

- Por convenção, uma quantidade é considerada positiva se flui para o sistema (entra) e negativa se flui para fora (sai).

Introdução

Balanço de massa

- Baseado no princípio de conservação de massa (Lei de Lavoisier).
- Equação que descreve a contabilidade de matéria num dado volume de controle envolvido num processo químico.
- Pode ser escrita para qualquer material que entra ou sai do volume de controle (massa total ou qualquer espécie molecular ou atômica envolvida no processo).

$$\boxed{\text{entrada}} - \boxed{\text{saída}} + \underbrace{\boxed{\text{geração}} - \boxed{\text{consumo}}}_{\text{reação química}} = \boxed{\text{acúmulo}}$$

Equação geral do balanço (EGB)

Balanço diferencial

- Diz respeito ao que ocorre num determinado instante de tempo e seus termos são expressos em massa ou mol por unidade de tempo (taxa).
- Será adotado $\dot{m}$ ($\mathrm{Kg/s}$) e $\dot{n}$ ($\mathrm{mol/s}$) para fluxo de massa e de mols, respectivamente.
- Usualmente empregada em sistemas contínuos.

$$\boxed{\begin{matrix}\text{taxa de acúmulo}\\ \text{(dentro do VC)}\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{taxa de entrada}\\ \text{(através da SC)}\end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix}\text{taxa de saída}\\ \text{(através da SC)}\end{matrix}}$$

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_s \qquad \text{(termos mássicos)}$$

Balanço de massa total (BMT)

Envolve a massa total de todos os componentes que entram e saem do sistema e portanto o termo *Reage* desaparece, uma vez que a matéria total é conservada (não é criada nem destruída, exceto em reações nucleares).

$$\boxed{\text{taxa acúmulo}} = \boxed{\text{taxa entrada}} - \boxed{\text{taxa saída}}$$

Em termos matemáticos,

$$\frac{dn}{dt} = \dot{n}_e - \dot{n}_s \qquad \text{(termos molares)}$$

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_s \qquad \text{(termos mássicos)}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(\rho V)}_{\text{variação de massa}} = \underbrace{\sum_i \rho_i f_i}_{\text{taxa de entrada}} - \underbrace{\sum_j \rho_j f_j}_{\text{taxa de saída}}$$

Balanço de massa de um componente

Equação geral de balanço para um dado componente A presente numa mistura.

$$\boxed{\text{taxa acúmulo (A)}} = \boxed{\text{taxa entrada (A)}} - \boxed{\text{taxa saída (A)}} + \underbrace{\boxed{\text{taxa geração (A)}}}_{\text{termo 'reage'}}$$

Em termos matemáticos,

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{A_e} - \dot{m}_{A_s} + R_A \qquad \text{(termos mássicos de A)}$$

$$\frac{dn_A}{dt} = \dot{n}_{A_e} - \dot{n}_{A_s} + R_A \qquad \text{(termos molares de A)}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(c_A V)}_{\text{variação de mols}} = \underbrace{\sum_i c_{A_i} f_{A_i}}_{\text{taxa de entrada de A}} - \underbrace{\sum_j c_{A_j} f_{A_j}}_{\text{taxa de saída de A}} + \underbrace{r_A V}_{\text{taxa de produção de A}}$$

Balanço de massa - caso particular

Processo em estado estacionário

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

$$\dot{m}_e = \dot{m}_s$$

Sumário

- **Energia:** capacidade de um sistema realizar trabalho ou produzir calor ($1\,\mathrm{J}$: erguer $100\,\mathrm{g}$ a $1\,\mathrm{m}$; $1\,\mathrm{cal}$: aquecer $1\,^{\circ}\mathrm{C}$ $1\,\mathrm{g}$).

Formas de energia

1. A primeira é a que o sistema apresenta num determinado estado (inicial ou final de um batelada ou das correntes que entram e saem de processos contínuos e semicontínuos) $\rightsquigarrow$ E: energia total de um sistema.

2. A segunda envolve energias transferidas entre o sistema e as vizinhanças $\rightsquigarrow$ Q: calor; W: trabalho.

Energia de um sistema

Energia total de um sistema (E)

1. Energia cinética (E_c): devida ao movimento do sistema como um todo em relação à uma referência,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

2. Energia potencial (E_p): devida à posição do sistema num campo potencial,

$$E_p = mgz$$

   z: altura relativa à um plano de referência em que $E_P = 0$

3. Energia interna (U): devida ao movimento de interação entre os átomos e moléculas em relação ao centro de massa do sistema. Não pode ser medida. Obs.: Geralmente associada a temperatura, mas pode haver mudança da energia interna sem mudança de temperatura.

- Simplificação em processo químicos

$$\frac{dE_c}{dt} \simeq 0, \quad \frac{dE_p}{dt} \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} \simeq \frac{dU}{dt}$$

Energia transferida

- Formas de *energia em trânsito*:

Energia transferida entre sistema e vizinhança

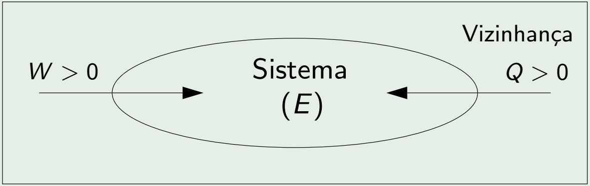
1. Calor (Q): transferida em função de uma diferença de temperatura.
2. Trabalho (W): transferida como resposta a qualquer força motriz (mecânica, elétrica ou de escoamento) que não seja a diferença de temperatura. Ex.: movimento de um pistão $\rightsquigarrow$ trabalho realizado sobre o sistema ou sobre a vizinhança.

Observações:

- Q e W não podem ser armazenados. São energias transferidas (em movimento).
- Não há sentido em falar Q e W contido ou possuído por um sistema.

Energia transferida

Convenção



- $Q > 0$: calor transferido pela vizinhança para o sistema
- $W > 0$: trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema

Formas que a energia pode entrar e sair de um sistema

Taxa de calor ($\dot{Q}$)

Total de fluxo de calor para o sistema (condução ou radiação).

Fluxo de energia acompanhando um fluxo de massa ($\dot{E}$):

Somatório das taxas das energias das correntes de massa que entram no sistema:

$$\dot{E} = \sum_i \dot{E}_i = \sum_i (\dot{U}_i + \dot{E}_{c_i} + \dot{E}_{p_i}), \quad \text{sendo} \quad \dot{E}_{c_i} = \frac{1}{2}\dot{m}v^2, \quad \dot{E}_{p_i} = \dot{m}gz$$

- Expressando de forma específica (propr. intensivas):

$$\dot{U} = \dot{m}\hat{U}, \quad \dot{E}_c = \dot{m}\hat{E}_c, \quad \dot{E}_p = \dot{m}\hat{E}_p, \quad \hat{E}_c = \frac{1}{2}v^2, \quad \hat{E}_p = gz$$

$$\dot{E} = \sum_i \dot{m}_i \hat{E}_i = \sum_i \dot{m}_i \left(\hat{U}_i + \hat{E}_{c_i} + \hat{E}_{p_i}\right) = \sum_i \dot{m}_i \left(\hat{U}_i + \frac{1}{2}v^2 + gz\right)$$

- Simplificação: variação das energias nos fluxos de massa não contribuem significante para $\Delta T(t) \rightsquigarrow \quad \Delta\dot{E}_c \simeq 0, \quad \Delta\dot{E}_p \simeq 0$

Formas que a energia pode entrar e sair de um sistema

Trabalho (W)

- Em sistemas abertos trabalho é realizado sobre o sistema pela vizinhança para fazer a massa entrar e trabalho é realizado pelo sistema sobre as vizinhanças para massa que sai do sistema:

$$\dot{W} = \dot{W}_e + \dot{W}_f$$

- Trabalho de eixo ($\dot{W}_e$)

Trabalho realizado sobre ou pelo fluido por paredes móveis dentro do sistema (rotor de uma bomba, turbina, eixo de um sistema de agitação).

  - Bomba: $\dot{W}_e > 0 \rightsquigarrow$ fluido recebe energia na forma de trabalho.
  - Turbina: $\dot{W}_e < 0 \rightsquigarrow$ fluido perde energia.

- Trabalho de fluxo ou trabalho PV ($\dot{W}_f$)

Trabalho realizado sobre o fluido na entrada menos o trabalho pelo fluido na saída do sistema, ou seja, saldo líquido do trabalho realizado por um fluido dotado de pressão e volume.

Balanço de energia em sistemas abertos

Equação geral de balanço (balanço diferencial)

$$\boxed{\text{Taxa de acúlumo } (E)} = \boxed{\text{Taxa entrada } (E)} \text{ - } \boxed{\text{Taxa saída } (E)}$$

$$\frac{dE}{dt} \simeq \frac{dU}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}_e + \underbrace{\sum_i \dot{m}_i \left(\hat{U}_i + P_i \hat{V}_i \right)}_{\text{entrada}} - \underbrace{\sum_j \dot{m}_j \left(\hat{U}_j + P_j \hat{V}_j \right)}_{\text{saída}}$$

Entalpia (H)

$$\hat{H} \triangleq \hat{U} + P\hat{V}$$

- Entalpia específica ($\hat{H}$): energia interna específica do fluido ($\hat{U}$) somada ao trabalho ($P\hat{V}$) necessário para que o fluido adentre ao sistema.

Balanço de energia em sistemas abertos

Equação geral de balanço (balanço diferencial) – entalpia específica

$$\frac{dE}{dt} \simeq \frac{dU}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}_e + \underbrace{\sum_i \dot{m}_i \hat{H}_i}_{\text{entrada}} - \underbrace{\sum_j \dot{m}_j \hat{H}_j}_{\text{saída}}$$

Forma simplificada

$$\frac{dE}{dt} \simeq \frac{dU}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}_e - \Delta\dot{H}$$

- Para líquidos em geral $$H = mc_pT, \qquad \dot{H} = \dot{m}c_pT, \qquad \hat{H} = c_pT$$

Δ significa ("saída" – "entrada") e c_p é o calor específico à pressão constante

Em regime permanente

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Balanço de energia em sistemas abertos

Simplificações comumente adotadas em processos contínuos

- Variação das energias nos fluxos de massa não contribuem significamente para $\Delta T(t)$
$$\Delta \dot{E}_c \simeq 0, \qquad \Delta \dot{E}_p \simeq 0$$
- Sistema com agitação $\rightsquigarrow$ trabalho de eixo desprezível: $\dot{W}_e \simeq 0$
- *Sistema não se move*
$$\frac{dE_c}{dt} = 0, \quad \frac{dE_p}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{dU}{dt}$$
$$\frac{d\hat{U}}{dT} = c_v T \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(c_v m T), \quad c_v(T) = c_v$$

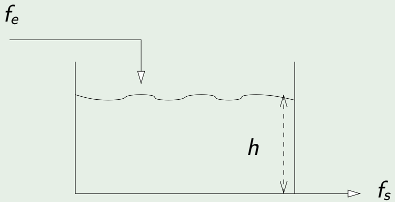
$$\boxed{\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(c_v m T) = \sum_{i:\ \text{entrada}} \rho_i f_i \hat{H}_i - \sum_{j:\ \text{saída}} \rho_j f_j \hat{H}_j + \dot{Q}, \quad \begin{cases} \hat{H}_i = c_p T_i \\ \hat{H}_j = c_p T_j \end{cases}}$$

- Sistemas líquidos: $c_p \simeq c_v$ $(P\hat{V} << \hat{U} \rightsquigarrow \Delta\hat{H} \simeq \Delta\hat{U})$

Balanço de energia em sistemas abertos

Exemplo: Tanque

Considere um tanque com uma corrente de entrada e uma de saída:



$$\frac{d}{dt}(m(t)) = \dot{m}_e(t) - \dot{m}_s(t), \qquad m(t) = \rho V(t) = \rho A h(t), \quad \dot{m} = \rho f(t)$$

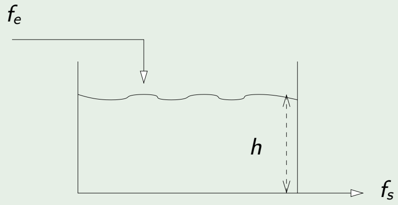
$$\rho A \frac{d}{dt}(h(t)) = \rho f_e(t) - \rho f_s(t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{A}(f_e(t) - f_s(t))}$$

Balanço de energia em sistemas abertos

Exemplo: Tanque

Considere um tanque com uma corrente de entrada e uma de saída:



$$\frac{d}{dt}(m(t)) = \dot{m}_e(t) - \dot{m}_s(t), \qquad m(t) = \rho V(t) = \rho A h(t), \quad \dot{m} = \rho f(t)$$

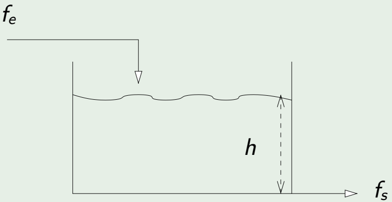
$$\rho A \frac{d}{dt}(h(t)) = \rho f_e(t) - \rho f_s(t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{A}(f_e(t) - f_s(t))}$$

Balanço de energia em sistemas abertos

Exemplo: Tanque

Considere um tanque com uma corrente de entrada e uma de saída:



$$\frac{d}{dt}(m(t)) = \dot{m}_e(t) - \dot{m}_s(t), \qquad m(t) = \rho V(t) = \rho A h(t), \quad \dot{m} = \rho f(t)$$

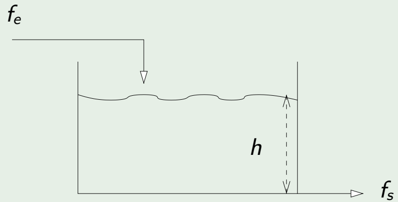
$$\rho A \frac{d}{dt}(h(t)) = \rho f_e(t) - \rho f_s(t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{A}(f_e(t) - f_s(t))}$$

Balanço de energia em sistemas abertos

Exemplo: Tanque

Considere um tanque com uma corrente de entrada e uma de saída:



$$\frac{d}{dt}(m(t)) = \dot{m}_e(t) - \dot{m}_s(t), \qquad m(t) = \rho V(t) = \rho A h(t), \quad \dot{m} = \rho f(t)$$

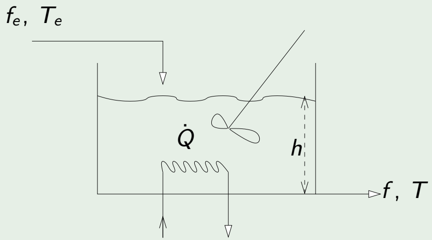
$$\rho A \frac{d}{dt}(h(t)) = \rho f_e(t) - \rho f_s(t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{A}(f_e(t) - f_s(t))}$$

Balanço de energia em sistemas abertos

Exemplo: Tanque com aquecimento

Considere um tanque com uma corrente de entrada e uma de saída e com aquecimento interno:



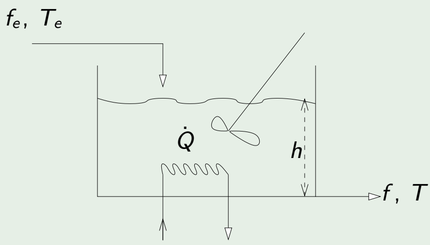
$$\frac{d}{dt}(\rho V(t) c_p T(t)) = \rho f_e(t) c_p T_e(t) - \rho f(t) c_p T(t) + \dot{Q}(t)$$

$$\rho A c_p \frac{d}{dt}(h(t) T(t)) = \rho f_e(t) c_p T_e(t) - \rho f(t) c_p T(t) + \dot{Q}(t)$$

$$A \frac{d}{dt}(h(t) T(t)) = f_e(t) T_e(t) - f(t) T(t) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p} \qquad (1)$$

Exemplo: Tanque com aquecimento

Considere um tanque com uma corrente de entrada e uma de saída e com aquecimento interno:



$$\frac{d}{dt}(\rho V(t) c_p T(t)) = \rho f_e(t) c_p T_e(t) - \rho f(t) c_p T(t) + \dot{Q}(t)$$

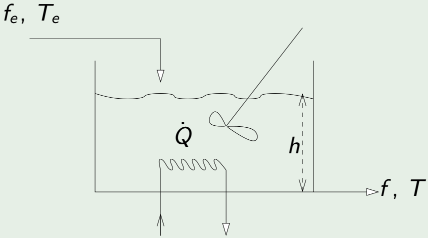
$$\rho A c_p \frac{d}{dt}(h(t)T(t)) = \rho f_e(t) c_p T_e(t) - \rho f(t) c_p T(t) + \dot{Q}(t)$$

$$A\frac{d}{dt}(h(t)T(t)) = f_e(t)T_e(t) - f(t)T(t) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p} \quad (1)$$

Balanço de energia em sistemas abertos

Exemplo: Tanque com aquecimento

Considere um tanque com uma corrente de entrada e uma de saída e com aquecimento interno:



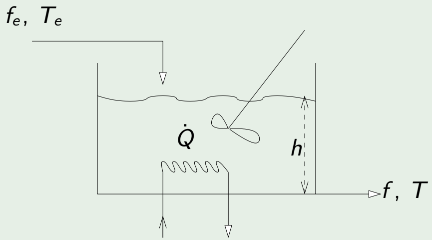
$$\frac{d}{dt}(\rho V(t) c_p T(t)) = \rho f_e(t) c_p T_e(t) - \rho f(t) c_p T(t) + \dot{Q}(t)$$

$$\rho A c_p \frac{d}{dt}(h(t) T(t)) = \rho f_e(t) c_p T_e(t) - \rho f(t) c_p T(t) + \dot{Q}(t)$$

$$A \frac{d}{dt}(h(t) T(t)) = f_e(t) T_e(t) - f(t) T(t) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p} \tag{1}$$

Exemplo: Tanque com aquecimento

Considere um tanque com uma corrente de entrada e uma de saída e com aquecimento interno:



$$\frac{d}{dt}(\rho V(t) c_p T(t)) = \rho f_e(t) c_p T_e(t) - \rho f(t) c_p T(t) + \dot{Q}(t)$$

$$\rho A c_p \frac{d}{dt}(h(t) T(t)) = \rho f_e(t) c_p T_e(t) - \rho f(t) c_p T(t) + \dot{Q}(t)$$

$$A \frac{d}{dt}(h(t) T(t)) = f_e(t) T_e(t) - f(t) T(t) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p} \quad (1)$$

Tanque com aquecimento (cont.)

- Seja a regra da cadeia

$$A\frac{d}{dt}(h(t)T(t)) = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)A\frac{d}{dt}h(t)$$

- Utilizando a edo do balanço de massa

$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - f(t)$$

- Tem-se

$$A\frac{d}{dt}(h(t)T(t)) = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)(f_e(t) - f(t)) \qquad (2)$$

- Substituindo (2) em (1),

$$f_e(t)T_e(t) - f(t)T(t) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p} = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)(f_e(t) - f(t))$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}T(t) = \frac{f_e(t)}{Ah(t)}(T_e(t) - T(t)) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p Ah(t)}}$$

Tanque com aquecimento (cont.)

- Seja a regra da cadeia

$$A\frac{d}{dt}(h(t)T(t)) = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)A\frac{d}{dt}h(t)$$

- Utilizando a edo do balanço de massa

$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - f(t)$$

- Tem-se

$$A\frac{d}{dt}(h(t)T(t)) = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)(f_e(t) - f(t)) \tag{2}$$

- Substituindo (2) em (1),

$$f_e(t)T_e(t) - f(t)T(t) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p} = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)(f_e(t) - f(t))$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}T(t) = \frac{f_e(t)}{Ah(t)}(T_e(t) - T(t)) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p Ah(t)}}$$

Tanque com aquecimento (cont.)

- Seja a regra da cadeia

$$A\frac{d}{dt}(h(t)T(t)) = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)A\frac{d}{dt}h(t)$$

- Utilizando a edo do balanço de massa

$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - f(t)$$

- Tem-se

$$A\frac{d}{dt}(h(t)T(t)) = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)(f_e(t) - f(t)) \qquad (2)$$

- Substituindo (2) em (1),

$$f_e(t)T_e(t) - f(t)T(t) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p} = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)(f_e(t) - f(t))$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}T(t) = \frac{f_e(t)}{Ah(t)}(T_e(t) - T(t)) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p Ah(t)}}$$

Tanque com aquecimento (cont.)

- Seja a regra da cadeia

$$A\frac{d}{dt}(h(t)T(t)) = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)A\frac{d}{dt}h(t)$$

- Utilizando a edo do balanço de massa

$$A\frac{d}{dt}h(t) = f_e(t) - f(t)$$

- Tem-se

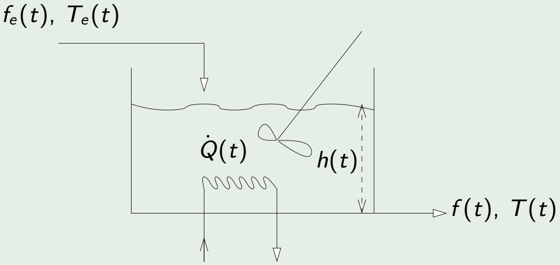
$$A\frac{d}{dt}(h(t)T(t)) = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)(f_e(t) - f(t)) \tag{2}$$

- Substituindo (2) em (1),

$$f_e(t)T_e(t) - f(t)T(t) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p} = Ah(t)\frac{d}{dt}T(t) + T(t)(f_e(t) - f(t))$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}T(t) = \frac{f_e(t)}{Ah(t)}(T_e(t) - T(t)) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p Ah(t)}}$$

Exemplo: Tanque com aquecimento



- Equações diferenciais que descrevem o processo:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}h(t) & = \dfrac{1}{A}(f_e(t) - f(t)) \\
\dfrac{d}{dt}T(t) & = \dfrac{f_e(t)}{Ah(t)}(T_e(t) - T(t)) + \dfrac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p A h(t)}
\end{cases}
$$

Transferência de calor

Taxa de transferência de calor ($\dot{Q}$)

- Transferência de calor por condução para um processo de temperatura T

$$\dot{Q} = kA_t \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right| \simeq UA_t(T_1 - T) = \hat{U}\,\Delta T$$

k: condutividade térmica do material
U: coeficiente de transferência de calor total
$\hat{U}$: condutância térmica
A_t: área de transferência de calor
$T_1(t)$: temperatura do material que transfere calor

- Observação: é possível também considerar o balanço de energia no elemento (ex.: resistência elétrica, serpentina de vapor etc) que transfere calor ao sistema através de uma superfície (parede).